

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 12

Ավագ դպրոցի
բնագիտամաթեմատիկական հոսքի
12-րդ դասարանի դասագիրք

Երևան

2011

Երկրաչափություն: Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 12-րդ
դասարանի դասագիրք - Եր.: 2011 - 140 էջ:

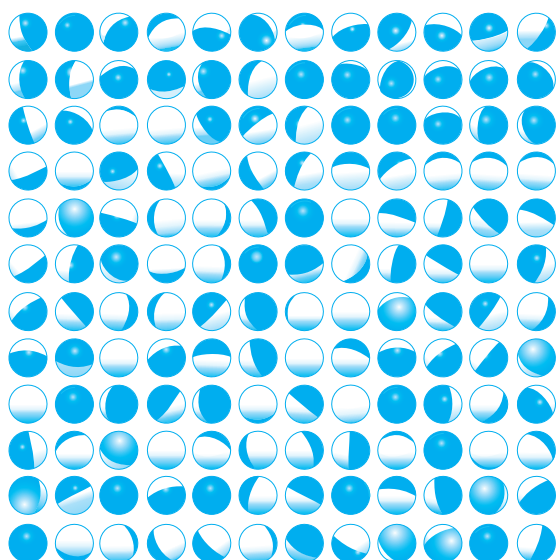
ԽՄԲԱԳՐԻ ԿՈՂՄԻՑ

Հաշվի առնելով, որ ըստ նախատեսված ծրագրի, 12-րդ դասարանի 2-րդ կիսամյակը ամբողջովին նվիրվում է երկրաչափության ամբողջ դասընթացի կրկնությանը, դասագրքի վերջում ավելացրել ենք հավելված՝ նվիրված հարթաչափության խնդիրներին, որոնք դասավորված են թեմատիկ բովանդակությամբ:

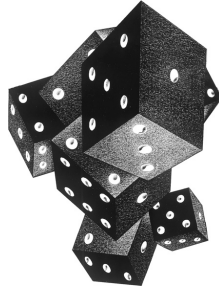
Նշենք նաև, որ դասագրքի հիմնական մասի վերջում ինքնաստուգման համար առաջարկված 100 խնդիրները և դրանց գնահատման չափանիշները ներկայումս ընդօրինակված են մեր հանրապետությունում մաթեմատիկայի միասնական քննությունների որոշ տիպի խնդիրների գնահատման համար:

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

12-րդ դասարան



ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

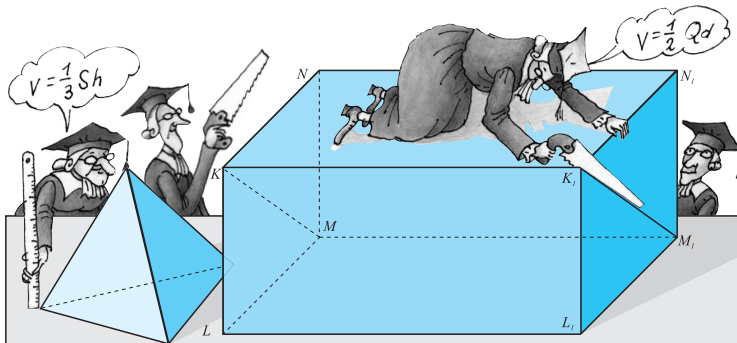


8.1 Ի՞նչ է ծավալը

Սահմանափակ հարթ պատկերի կարևորագույն թվային բնութագրերից մեկը նրա մակերեսն է: Սահմանափակ մարմնի մեծությունը բնութագրում է նրա ծավալը: Ծավալի գաղափարի, ինչպես նաև նրա հաշվման որոշ բանաձևերի հետ դուք արդեն ծանոթ եք ոչ միայն տարբեր առարկաների դասերից, այլև առօրյա կյանքից:

Ինչ-որ իմաստով ծավալի գաղափարը ավելի առաջնային և բնական է, քան մակերեսի գաղափարը:

Մասնավորապես, պրակտիկ տեսանկյունից դժվար չէ առաջարկել ամենատարբեր մտացածին տեսքի մարմինների ծավալների հաշվման եղանակներ, օրինակ, հաշվելով այն ջրի քանակը, որը դուրս է մղում այդ մարմինը ջրի մեջ ընկղմելիս: Մինչդեռ բարդ տեսքի կորով սահմանափակված հարթ պատկերի կամ ծոմոված մակերևույթի վրա գտնվող պատկերի մակերեսը, պրակտիկորեն այնքան էլ հեշտ չէ հաշվել: Ավելին, նման տիպի պատկերների մակերեսների հաշվման պրակտիկ եղանակները, ըստ էության, հանդիսանում են ծավալի հաշվման եղանակներ:



Ծավալի հաշվման մաթեմատիկական տեսությունը կառուցվում է հարթ պատկերների մակերեսների տեսության մեջ: Կառաջնորդվենք հայտնի սխեմայով, սակայն պարզության և հարմարության համար սկզբում կդիտարկենք միայն բազմանիստեր, չնայած ծավալների՝ հետագայում ձևակերպված հատկությունները վերաբերում են նաև ընդհանուր տեսքի մարմիններին:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ ⁽¹⁾

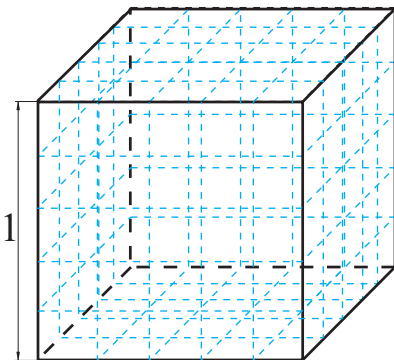
Յուրաքանչյուր մարմնի կարելի է համապատասխանության մեջ դնել մի դրական թիվ, որը կոչվում է այդ մարմնի ծավալ: Ընդ որում, տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1. Հավասար մարմինների ծավալները հավասար են,
2. Եթե մարմինը բաժանված է երկու մասի, ապա նրա ծավալը հավասար է այդ մասերի ծավալների գումարին (ծավալի ադդիտիվության հատկությունը),
3. Եթե տրված է երկարության միավոր, ապա այդ երկարության միավորին հավասար կող ունեցող խորանարդի ծավալը հավասար է մեկ խորանարդ միավորի (1 միավոր³):

Օրինակ, 1 սմ կող ունեցող խորանարդի ծավալը հավասար է մեկ խորանարդ սանտիմետրի (1 սմ³):

Հետևանք.

1-3 հատկություններից անմիջապես հետևում է, որ $\frac{1}{n}$ -ի հավասար կող ունեցող խորանարդի ծավալը, որտեղ n -ը բնական թիվ է, հավասար է $\frac{1}{n^3}$ խորանարդ միավորի (միավոր³):



Նկ. 1

Իրոք, խորանարդի յուրաքանչյուր կողը բաժանենք n հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք նրա նիստերին զուգահեռ հարթություններ (նկ. 1): Դրանով 1 ծավալ ունեցող խորանարդը կբաժանվի n^3 հատ իրար հավասար խորանարդների: Ըստ 1-3 հատկությունների, դրանցից յուրաքանչյուրի ծավալը հավասար է

$$\frac{1}{n^3} \text{ (միավոր):}$$

ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ. Հետագայում մենք հաճախ չենք նշի ծավալի միավորը, այլ ուղղակի կգրենք՝ ծավալը հավասար է V , ծավալը 3 է և այլն:

⁽¹⁾ [Այս սահմանման կոռեկտության ապացույցը դուրս է դպրոցական մաթեմատիկայի ծրագրից:]

8.2 Ուղղանկյունանիստի ծավալը

ԹԵՈՐԵՄ 8.1 (Ուղղանկյունանիստի ծավալի բանաձևը)

Ուղղանկյունանիստի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով

$$V = a \cdot b \cdot c, \quad (1)$$

որտեղ a , b և c -ն ուղղանկյունանիստի միևնույն գագաթից ելնող կողերի երկարություններն են:

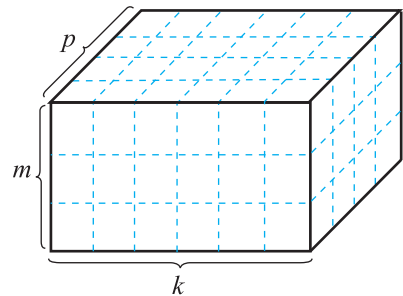
Համեմատեք (1) բանաձևը ուղղանկյան մակերեսի բանաձևի հետ:

Ապացույց. Այս թեորեմի ապացույցը բաժանենք մի քանի փուլերի.

1. (1) բանաձևը ապացուցենք մախ այն դեպքում, երբ ուղղանկյունանիստի բոլոր կողերի երկարություններն արտահայտվում են ռացիոնալ թվերով: Այդ թվերը բերենք ընդհանուր հայտարարի: Դիցուք $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{k}{n}$, $c = \frac{p}{n}$: Տվյալ ուղղանկյունանիստի կողերը բաժանենք համապատասխանաբար m , k և p հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք ուղղանկյունանիստի նիստերին զուգահեռ հարթություններ (նկ. 2): Այդ հարթությունները ուղղանկյունանիստը կտրոհեն mkp հատ իրար հավասար խորանարդիկների, որոնց կողը

$\frac{1}{n}$ է: Ինչպես գիտենք (տե՛ս ծավալի հատկություններից բխող հետևանքը) յուրաքանչյուր խորանարդիկի ծավալը $\frac{1}{n^3}$ է: Ծավալի 1 և 2 հատկություններից ստանում ենք, որ ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է

$V = mkp \cdot \frac{1}{n^3} = abc$ (միավոր³): Այսպիսով, (1) բանաձևը քննարկվող դեպքի համար ապացուցված է:



Նկ. 2

2. Դիցուք ուղղանկյունանիստի երկու կողերի երկարություններն են արտահայտվում ռացիոնալ թվերով: Ենթադրենք a -ն և b -ն են ռացիոնալ: Վերցնենք կամայական n բնական թիվ և p բնական թիվը ընտրենք այնպես, որ

$\frac{p}{n} \leq c < \frac{p+1}{n}$: Դիտարկենք երկու ուղղանկյունանիստեր a , b , $\frac{p}{n}$ և a , b , $\frac{p+1}{n}$

կողերով: Այդ ուղղանկյունանիստերի ծավալները հավասար են $ab \cdot \frac{p}{n}$ և $ab \cdot \frac{p+1}{n}$ (ըստ 1 դեպքի): Եթե V -ն քննարկվող ուղղանկյունանիստի ծավալն է, ապա ծավալի հատկություններից հետևում է, որ

$$\frac{abp}{n} \leq V < \frac{ab(p+1)}{n}$$

կամ

$$\frac{abp}{n} - abc \leq V - abc < \frac{ab(p+1)}{n} - abc$$

$$ab\left(\frac{p}{n} - c\right) \leq V - abc < ab\left(\frac{p+1}{n} - c\right): \quad (*)$$

Բայց $\frac{p}{n} \leq c < \frac{p+1}{n}$ անհավասարությունից հետևում է, որ $p \leq nc, p > nc - 1$: Փոխարինելով p -ն $(*)$ անհավասարության ձախ մասում նրանից փոքր $nc-1$ թվով, իսկ աջ մասում՝ նրանից մեծ nc թվով, կստանանք՝

$$-\frac{ab}{n} \leq V - abc < \frac{ab}{n},$$

կամ

$$|V - abc| \leq \frac{ab}{n}:$$

Վերջին անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած n բնական թվի համար: Դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, եթե $V = abc$:

3. Դիցուք քննարկվող ուղղանկյունանիստի կողերից միայն մեկի երկարությունն է արտահայտվում ռացիոնալ թվով: Ենթադրենք դա a երկարությամբ կողն է: Ինչպես և 2-րդ դեպքում, վերցնենք կամայական n բնական թիվ և p բնական թիվը ընտրենք այնպես, որ $\frac{p}{n} \leq c < \frac{p+1}{n}$: Դիտարկենք երկու ուղղանկյունանիստներ $a, b, \frac{p}{n}$ և $a, b, \frac{p+1}{n}$ կողերով: Դրանց ծավալները համապատասխանաբար հավասար են $a \cdot b \cdot \frac{p}{n}$ և $a \cdot b \cdot \frac{p+1}{n}$, քանի որ նրանց երկու կողերի երկարությունները արտահայտվում են ռացիոնալ թվերով: Մնում է բառացիորեն կրկնել 2-րդ դեպքի համար բերված դատողությունները:

4. Այն դեպքը, երբ ուղղանկյունանիստի բոլոր կողերի երկարություններն արտահայտվում են իռացիոնալ թվերով, բերվում է 3-րդ դեպքին ճիշտ այնպես, ինչպես 3-րդ դեպքը բերվեց 2-րդին: ▽

Հետևանք.

(1) բանաձևից բխում է, որ a կողով խորանարդի ծավալը հավասար է a^3 :

8.3. Պրիզմայի ծավալը

Թեորեմ 8.2. (Պրիզմայի ծավալի հիմնական բանաձևը)

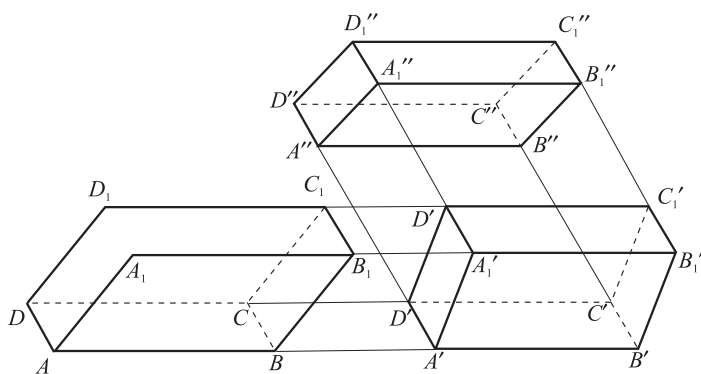
Կամայական պրիզմայի ծավալի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$V = S \cdot h \quad (2)$$

որտեղ S -ը պրիզմայի հիմքի մակերեսն է, իսկ h -ը նրա բարձրությունը (հիմքերի հարթությունների հեռավորությունը):

Ապացույց. (2) բանաձևը նախ ապացուցենք *գուգահեռանիստի* համար:

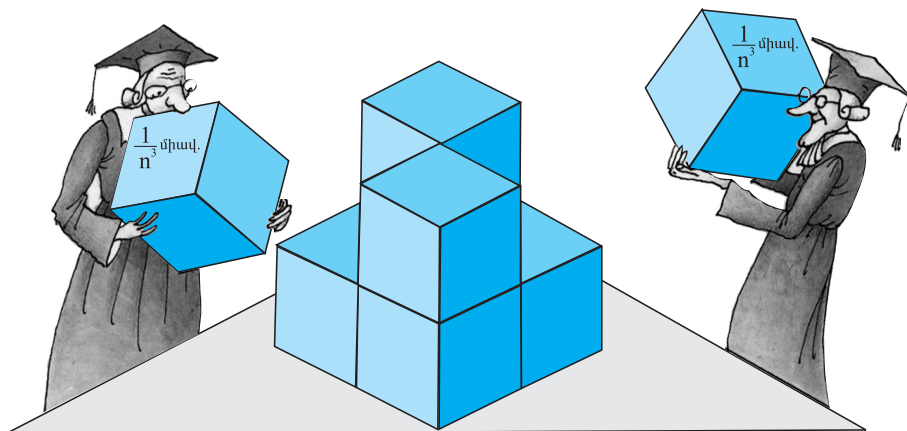
Դիտարկենք $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ գուգահեռանիստը: Տանենք AB կողին ուղղահայաց երկու հարթություններ, որոնց հեռավորությունը հավասար է AB կողի երկարությանը և այնպես, որ այդ հարթությունները չեն հատվում տված գու-

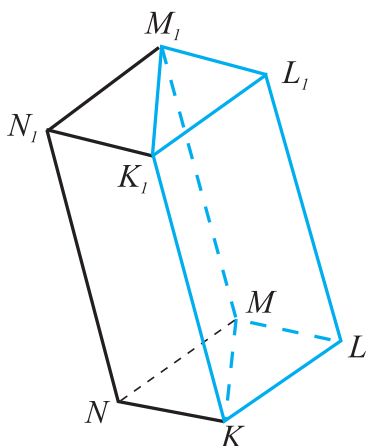


Նկ. 3

զահեռանիստի հետ: Դիտարկենք $A'B'C'D'$ $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը, որի զագաթները նշված հարթությունների հատման կետերն են AB , CD , A_1B_1 , C_1D_1 ուղիղների հետ (նկ. 3): $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ և $A'B'C'D'$ $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստները ունեն իրար հավասար ծավալներ, որովհետև երկրորդ զուգահեռանիստի ծավալը կարելի է ստանալ առաջինի ծավալից, եթե առաջինի ծավալին ավելացնենք $BCC_1B_1B'C'C_1B_1$ բազմանիստի ծավալը և ստացվածից հանենք $ADD_1A_1A'D'D_1A_1$ բազմանիստի ծավալը: Բայց այդ բազմանիստները հավասար են, ուստի մենք ապացուցեցինք, որ $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ և $A'B'C'D'$ $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստների ծավալները հավասար են: Ընդ որում, $A'B'C'D'$ $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը, բացի, գուցե $A'D'$ D_1A_1 և $B'C'C_1B_1$ նիստերից, ուղղանկյուններ են:

Այժմ, ճիշտ մույն ձևով, տանելով $A'D'$ ուղիղն ուղղահայաց և իրարից $A'D'$ հեռավորությամբ երկու հարթություններ, կառուցենք $A''B''C''D''$ $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը (նկ. 91): Այդ զուգահեռանիստը հանդիսանում է ուղղանկյունանիստ, նրա ծավալը հավասար է սկզբնական $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի ծավալին, $A''B''C''D''$ ուղղանկյան մակերեսը հավասար է $ABCD$





Նկ. 4

զուգահեռագծի մակերեսին, $A''B''C''D''$ և $A''_1B''_1C''_1D''_1$ նիստերի հեռավորությանը հավասար է $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ նիստերի հեռավորությանը: Ուստի, եթե S -ը $ABCD$ -ի մակերեսն է, h -ը սկզբնական զուգահեռանիստում այդ նիստին տարված բարձրությունը, ապա նրա ծավալը, որը հավասար է $A''B''C''D''A''_1B''_1C''_1D''_1$ ուղղանկյունանիստի ծավալին, հավասար է $S \cdot h$:

Այժմ ապացուցենք (2) բանաձևը եռանկյան պրիզմայի համար: Դիտարկենք $KLMK_1L_1M_1$ եռանկյան պրիզման և լրացնենք այն մինչև $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ուղղանկյունանիստ (նկ. 4):

Պարզ է, որ սկզբնական եռանկյուն պրիզմայի ծավալը կազմում է ստացված զուգահեռանիստի

ծավալի կեսը, իսկ նրա KLM հիմքի մակերեսը հավասար է $KLMN$ զուգահեռագծի մակերեսի կեսին: Ասվածից հետևում է, որ (2) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած եռանկյան պրիզմայի համար: Իսկ քանի որ ցանկացած պրիզմա կարելի է տրոհել վերջավոր հատ եռանկյան պրիզմաների, սկզբնապես նրա հիմքի բազմանկյունը տրոհելով եռանկյունների, ապա, նշանակում է (2) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած պրիզմայի համար: ▽

Եռանկյան պրիզմայի ծավալի հաշվման համար կարելի է առաջարկել ևս մեկ օգտակար բանաձև:

Թեորեմ 8.3 (եռանկյուն պրիզմայի ծավալի հաշվման բանաձևը կողմնային նիստի մակերեսի միջոցով)

Դիցուք Q -ն եռանկյան պրիզմայի կողմնային նիստերից մեկի մակերեսն է, իսկ d -ն այդ նիստից մինչև պրիզմայում նրա հանդիպակաց կողը եղած հեռավորությունը: Այդ դեպքում եռանկյան պրիզմայի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \frac{1}{2} Q \cdot d : \quad (3)$$

Ապացույց. Օգտվենք 4 նկարից: Ինչպես գիտենք, $KLMN$ $K_1L_1M_1N_1$ զուգահեռանիստի ծավալը երկու անգամ մեծ է $KLMK_1L_1M_1$ պրիզմայի ծավալից: Դիցուք KLL_1K_1 նիստի մակերեսը Q է, իսկ MM_1 կողի հեռավորությունը այդ նիստից հավասար է d -ի: Համարելով, որ զուգահեռանիստի հիմքը KLL_1K_1 նիստն է, կստանանք որ նրա ծավալը հավասար է $Q \cdot d$: Ուստի եռանկյուն պրիզմայի ծավալը կլինի $\frac{1}{2} Q \cdot d$: ▽

Թեք պրիզմայի ծավալի հաշվման ևս մեկ բանաձև արտաձևելու համար նախ սահմանենք թեք պրիզմայի ուղղահայաց հատույթի գաղափարը:

Դիցուք տրված է կամայական թեք պրիզմա (նկ. 5): Նրա կողմնային կողերից մեկն ընդգրկող ուղղին պատկանող որևէ A_2 կետով տանենք α հարթություն, որն ուղղահայաց լինի այդ ուղղին:

Իբրև պրիզմայի ուղղահայաց հատույթ ընդունում են α հարթության և պրիզմայի կողմնային կողերը պարունակող ուղիղների հատման կետերը զագաթներ ունեցող բազմանկյունը (նկ. 5-ում դա $A_2B_2C_2D_2$ բազմանկյունն է):

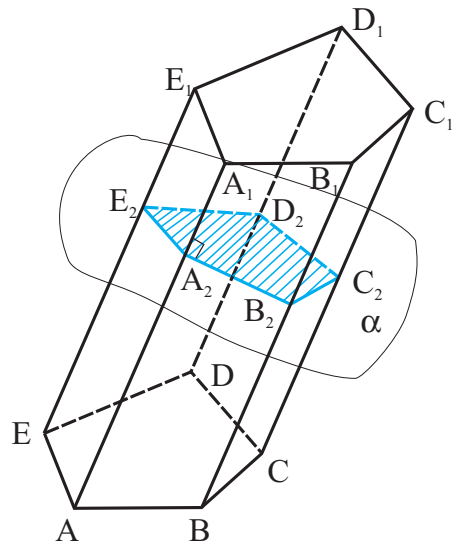
Այս սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ *պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա ուղղահայաց հատույթի պարագծի և կողմնային կողի արտադրյալին*:

Իրոք, եթե պրիզմայի կողմնային նիստեր հանդիսացող գուգահեռագծերի համար իբրև հիմքեր ընդունենք պրիզմայի կողմնային կողերը, ապա այդ գուգահեռագծերի բարձրություններ կլինեն ուղղահայաց հատույթի կողմերը. ուստի գումարելով բոլոր կողմնային նիստերի մակերեսները կստանանք նշված բանաձևը:

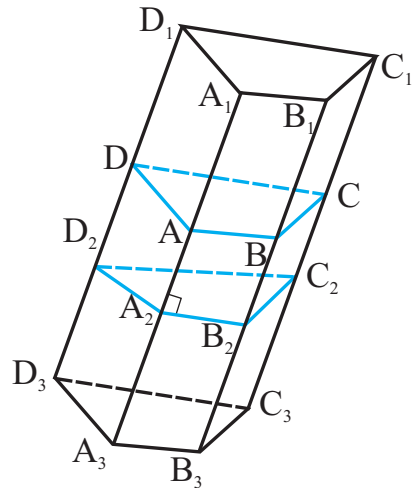
Ճիշտ է հետևյալ թեորեմը՝

Թեք պրիզմայի ծավալը հավասար է ուղղահայաց հատույթի մակերեսի և կողմնային կողի արտադրյալին:

Ապացույց: Դիցուք տրված է AC_1 թեք պրիզման⁽¹⁾ (նկ. 6): A_1A կողի շարունակության վրա վերցնենք A_2 կետը և դիտարկենք պրիզմայի $A_2B_2C_2D_2$ ուղղահայաց հատույթը: Այդ հատույթը ընդունենք A_2C_3 ուղիղ պրիզմայի հիմք, որի կողմնային կողերը երկարությամբ հավասար են AC_1 թեք պրիզմայի կողմնային կողերին: A_2C_1 և A_3C բազմանիստերը (որոնք պրիզմաներ չեն) ունեն հավասար ծավալներ՝ $V_{A_2C_1} = V_{A_3C}$, որովհետև համընկնում են $\overline{A_1A}$ վեկտորով գուգահեռ տեղափոխության դեպքում:



Նկ. 5



Նկ. 6

⁽¹⁾ Հակիրճ գրելու համար բազմանիստը նշանակենք, նշելով նրա որևէ անկյունագիծը

Մյուս կողմից, ըստ ծավալների 2-րդ հատկության՝

$$V_{A_2C_1} = V_{AC_1} + V_{A_2C} \text{ և } V_{A_3C} = V_{A_3C_2} + V_{A_2C}$$

Այս երկու հավասարություններից ստանում ենք

$$V_{AC_1} = V_{A_3C_2};$$

Ըստ ուղիղ պրիզմայի ծավալի բանաձևի՝

$$V_{A_3C_2} = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot A_2A_3 = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot A_1A;$$

Այդ դեպքում

$$V_{AC_1} = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot A_1A,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: ▽



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Դիցուք P , Q և L -ը ուղղանկյուն գուգահեռանիստի երեք միստերի մակերեսներն են: Գտեք նրա ծավալը:

2. (կ) Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը հավասար է d և նրա երկու միստերի հետ կազմում է 60° և 45° անկյուններ: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

3. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը հավասար է d և նրա երկու միստերի հետ կազմում է α և β անկյուններ: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

4. (կ) Ուղղանկյունանիստի միստերի անկյունագծերը հավասար են $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ և 2: Գտեք նրա ծավալը:

5. Գտեք կանոնավոր եռանկյան պրիզմայի ծավալը, եթե նրա բոլոր կողերը հավասար են 1-ի:

6. Մի քանի միավոր խորանարդներ տարածության մեջ հաջորդաբար դասավորված են այնպես, որ յուրաքանչյուր խորանարդ, սկսած երկրորդից, իր նախորդի հետ ունի ընդհանուր միստ և ցանկացած երկու խորանարդ ընդհանուր ներքին կետեր չունեն: Գտեք այդ խորանարդներով առաջացած բազմանիստի ծավալը, եթե խորանարդների կենտրոնները հաջորդաբար միացնող բեկյալի երկարությունը հավասար է 101-ի:

7. Ջուգահեռանիստի երեք գագաթների հեռավորությունները նրանց հանդիպակաց միստերից հավասար են 2, 3 և 4: Ջուգահեռանիստի բոլոր միստերի մակերեսների գումարը (լրիվ մակերևույթի մակերեսը) 36 է: Գտեք Ջուգահեռանիստի միստերի մակերեսները:

8. Բուրգի բարձրությունը հավասար է 3, իսկ հիմքի մակերեսը՝ 9:

Գտեք այն պրիզմայի ծավալը, որի մի հիմքը գտնվում է բուրգի հիմքի մեջ, իսկ հանդիպակաց հիմքը հանդիսանում է բուրգի գագաթից 1 հեռավորությամբ անցնող հարթությունով բուրգի հատույթ: Գտեք նման տիպի պրիզմաների հնարավոր մեծագույն ծավալը (փոփոխվում է պրիզմայի «վերին» հիմքի հեռավորությունը բուրգի գագաթից):

9. Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը, եթե նրա երկու նիստերը 1 կողով և 60° սուր անկյունով շեղանկյուններ են, իսկ մնացած նիստերը՝ քառակուսիներ:

10. (օ) 1 կողմով ABC կանոնավոր եռանկյան A, B և C գագաթներից կանգնեցված են ուղղահայացներ ABC հարթությանը և նրանց վրա համապատասխանաբար վերցված են A_1 , B_1 և C_1 կետերը, որոնք գտնվում են ABC հարթության մի կողմում, այնպես որ $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$, $CC_1 = 6$: Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ բազմանիստի ծավալը:

11. (օ) Միավոր քառակուսու գագաթներում նրա հարթությանը կանգնեցված են ուղղահայացներ և նրանց վրա քառակուսու հարթության մի կողմում վերցված են կետեր, որոնք այդ հարթությունից գտնվում են (ըստ գագաթների շրջանցման ուղղության) 3, 4, 6, 5 հեռավորության վրա: Գտեք այն բազմանիստի ծավալը, որի գագաթները նշված կետերը և քառակուսու գագաթներն են:

12. Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա անկյունագծային հատույթների⁽¹⁾ մակերեսները հավասար են $\sqrt{13}$, $2\sqrt{10}$, $3\sqrt{5}$:

13. Խորանարդի կարկասը պատրաստված է փայտե ձողերից, որոնց հատույթները 1 կողով քառակուսիներ են: Խորանարդի կողը հավասար է 8-ի: Գտնել կարկասի ծավալը:

14. 10 կողով խորանարդի մեջ դիտարկվում են հետևյալ կետերի բազմությունները՝

ա) կետեր, որոնք գտնվում են խորանարդի ճիշտ երեք նիստերից ոչ ավելի քան 1 հեռավորության վրա,

բ) կետեր, որոնք խորանարդի ճիշտ երկու նիստերից են գտնվում ոչ ավելի, քան 1 հեռավորության վրա,

գ) կետեր, որոնք խորանարդի ճիշտ մեկ նիստից են գտնվում ոչ ավելի, քան 1 հեռավորության վրա:

Գտեք նշված կետերից կազմված մարմինների ծավալները:

15. (դ) Գտեք այն զուգահեռանիստի ծավալը, որի բոլոր նիստերը 1 կողով և 60° սուր անկյունով շեղանկյուններ են:

16. (դ) Միավոր կանոնավոր տետրաեդրի կողի վրա վերցված է կետ, որը այդ կողը բաժանում է 1:2 հարաբերությամբ: Այդ կետով տարված են երկու հարթություններ, որոնք զուգահեռ են տետրաեդրի երկու նիստերին և տետրաեդրից կտրում են բուրգեր: Գտեք մնացած մասի ծավալը:

17. (օ) Ապացուցեք, որ կանոնավոր $2n$ -անկյուն պրիզմայի կողմնային մակերևույթը հատող, բայց նրա հիմքերը չհատող հարթությունը բաժանում է պրիզմայի առանցքը, կողմնային մակերևույթի մակերեսը և ծավալը միևնույն հարաբերությամբ:

[⁽¹⁾ անկյունագծային հատույթը պրիզմայի որևէ անկյունագծով և նրա հետ հատվող որևէ կողով անցնող հատույթն է:]



1. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագիծը հավասար է l -ի և մի նիստի հետ կազմում է 30° -ի անկյուն, իսկ մյուսի հետ՝ 45° -ի: Որոշել ծավալը:

2. Ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքի կողմերն են 8 սմ և 15 սմ և կազմում են 60° -ի անկյուն, զուգահեռանիստի փոքր անկյունագիծը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30° -ի անկյուն: Որոշել այդ զուգահեռանիստի ծավալը:

3. Չուգահեռանիստի համար որպես հիմք ծառայում է շեղանկյունը, անկյունագծային հատույթներն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը և նրանց մակերեսները պարունակում են 100 սմ² և 105 սմ², իսկ նրանց հատման գծի երկարությունը հավասար է 10 սմ-ի: Որոշել այդ զուգահեռանիստի ծավալն ու կողմնային մակերևույթը:

4. ABCD հիմքն ունեցող ուղիղ զուգահեռանիստի մեջ AB կողը հավասար է 50 սմ-ի: B₁ գագաթից AD կողին իջեցրած B₁E ուղղահայացը հավասար է 41 սմ-ի և AD-ն բաժանում է AE = 30 սմ և ED = 18 սմ հատվածների: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը:

5. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի մեջ ամենամեծ անկյունագծային հատույթի մակերեսը հավասար է 4 մ²-ի, իսկ երկու հանդիպակաց կողմնային նիստերի հեռավորությունը՝ 2մ: Գտնել պրիզմայի ծավալը:

6. Ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմերն են 4 սմ, 5 սմ և 7 սմ, իսկ կողմնային կողը հավասար է հիմքի մեծ բարձրությանը: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

7. Ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի հիմքի մակերեսը հավասար է 4 սմ²-ի, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսներն են 9 սմ², 10սմ² և 17 սմ²: Որոշել ծավալը:

8. Ուղիղ պրիզմայի համար որպես հիմք ծառայում է ABCD սեղանը, որի զուգահեռ կողմերը՝ AD = 39 սմ և BC = 22 սմ, իսկ ոչ զուգահեռ կողմերը՝ AB = 26 սմ և CD = 25 սմ: AACC հատույթի մակերեսը պարունակում է 400 սմ²: Որոշել այդ պրիզմայի ծավալը:

9. ACDB-ն կիսաշրջանագիծ է, որի շառավիղն է R, C-ն նրա միջնակետն է, D-ն B աղեղի միջնակետն է: Որոշել այն ուղիղ պրիզմայի ծավալը, որի համար որպես հիմք ծառայում է ADB եռանկյունը, իսկ կողմնային կողը հավասար է AC լարին:

10. 1) Թեք զուգահեռանիստի հիմքը քառակուսի է, որի կողմը հավասար է 1 մ-ի: Կողմնային կողերից մեկը հիմքի իրեն կից յուրաքանչյուր կողմի հետ կազմում է 60° -ի անկյուն և հավասար է 2 մ-ի: Գտնել զուգահեռանիստի ծավալը:

2) Թեք զուգահեռանիստի հիմքը քառակուսի է, և կողմնային կողմերից մեկը հիմքի իրեն կից կողմերի հետ կազմում է հավասար սուր անկյուններ: Հիմքի կողմը հավասար է a -ի, կողմնային կողը՝ b -ի, երկու հիմքերի համապատասխան կողմերի հեռավորությունը՝ c -ի: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը ($a = 15$, $b = 14$ և $c = 10$):

11. Չուգահեռանիստի նիստերը a կողմ ունեցող հավասար շեղանկյուններ են և ունեն 60° -ի սուր անկյուն: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը:

12. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը a և b կողմեր ունեցող ուղղանկյունն է, c կողմնային կողը հիմքի կողմերի հետ կազմում է 60° -ի անկյուն: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը, կողմնային մակերևույթը և կողմնային կողի թեքության անկյունը հիմքի հարթության նկատմամբ:

13. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը a կողմով և 60° -ի անկյունով $ABCD$ շեղանկյունն է: AA_1 կողը նույնպես հավասար է a -ի, որը AB և AD կողերի հետ կազմում է 45° -ի անկյուններ: Որոշել այդ զուգահեռանիստի ծավալը:

14. Պրիզմայի համար որպես հիմք ծառայում է ABC կանոնավոր եռանկյունը, որի կողմը հավասար է a -ի: A_1 գագաթը պրոյեկտվում է ստորին հիմքի կենտրոնում, և AA_1 կողը հիմքի հետ կազմում է 45° -ի անկյուն: Որոշել պրիզմայի ծավալն ու կողմնային մակերևույթը:

15. Թեք պրիզմայի համար որպես հիմք ծառայում է a կողմ ունեցող հավասարակողմ եռանկյունը: Կողմնային նիստերից մեկն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և իրենից ներկայացնում է շեղանկյուն, որի փոքր անկյունագիծը հավասար է c -ի: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

16. 1) Թեք եռանկյուն պրիզմայի կողմնային կողերը հավասար են 15 մ-ի, իսկ նրանց միջև եղած հեռավորությունները՝ 26 մ-ի և 17 մ-ի: Որոշել նրա ծավալը:

2) Տվյալ եռանկյուն պրիզմայի մեջ կողմնային կողերի միջև եղած հեռավորությունները հարաբերում են ինչպես $9 : 10 : 17$. կողմնային կողը հավասար է 1 մ-ի, կողմնային մակերևույթը՝ 6 մ²-ի: Որոշել այդ պրիզմայի ծավալը:

17. Թեք պրիզմայի համար որպես հիմք ծառայում է $ABCD$ քառանկյունը, որի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են. AA_1C_1C անկյունագծային հատույթն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը, BD անկյունագիծը հավասար է 16 դմ-ի, AA_1C_1C հատույթի մակերեսը հավասար է 250 դմ²-ի: Որոշել ծավալը:

18. Թեք եռանկյուն պրիզմայի մեջ կողմնային նիստերից մեկի մակերեսը m^2 է, իսկ նրա հեռավորությունը հանդիպակաց կողից՝ $2a$: Ինչի^օ է հավասար պրիզմայի ծավալը:

8.4. Նմանության սկզբունքը

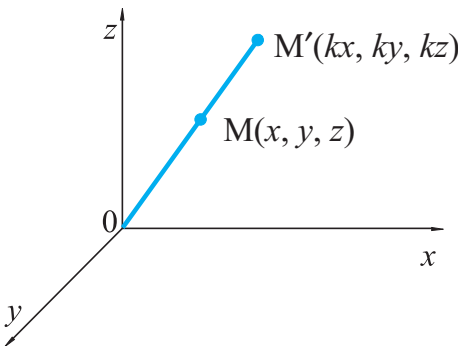
Տարածության մեջ, ինչպես և հարթության վրա, յուրաքանչյուր պատկեր կամ մարմին տալիս է իրար նման պատկերների կամ մարմինների ընտանիք (խոսքը վերաբերում է էվկլիդեսյան տարածությանը կամ էվկլիդեսյան հարթությանը): Նմանության գոյությունը մեր կողմից ուսումնասիրվող երկրաչափության բնութագրիչ առանձնահատկությունն է:

Կամայական մարմինների նմանությունը սահմանվում է ճիշտ այնպես, ինչպես կամայական պատկերների նմանությունը հարթության վրա.

Եթե տարածության մեջ F և F_1 մարմինները կոչվում են նման, եթե նրանց կետերի միջև կարելի է ստեղծել այնպիսի փոխմիարժեք համապատասխանություն (այսինքն մի պատկերի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է մյուսի մի կետ և հակառակը), որի դեպքում պահպանվում են հեռավորությունների հարաբերությունները: Այսինքն, եթե F մարմնի M և N կետերին համապատասխանում են F_1 մարմնի M_1 և N_1 կետերը, ապա $\frac{M_1N_1}{MN} = k$, որտեղ k -ն հաստատուն քիվ է և կոչվում է F_1 մարմնի նմանության գործակից F մարմնի նկատմամբ:

Ապացուցենք հետևյալ կարևոր պնդումը.

Բութի հիմքին զուգահեռ հարթությունը նրանցից կտրում է նրան նման բութ:



Նկ. 7

Ապացույց: Նախ համոզվենք, որ հոմոտետիայի (նմանադրության) ձևափոխությունը տարածության մեջ հանդիսանում է նմանության ձևափոխություն: Իրոք, դիցուք O -ն հոմոտետիայի կենտրոնն է, իսկ k -ն՝ հոմոտետիայի գործակիցը ($k > 0$): Մտցնենք դեկարտյան կոորդինատային համակարգ՝ ընդունելով O -ն որպես կոորդինատների սկզբնակետ:

Հոմոտետիայի սահմանումից հետևում է, որ տարածության ցանկացած $M(x, y, z)$ կետ կարտապատկերվի $M'(kx, ky, kz)$ կետի քանի որ $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ (նկ. 7):

Վերցնենք այժմ ցանկացած $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետեր: Հոմոտետիայի ձևափոխությամբ նրանք կանցնեն $A'(kx_1, ky_1, kz_1)$ և $B'(kx_2, ky_2, kz_2)$ կետերի: Ունենք՝

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ A'B'^2 &= (kx_2 - kx_1)^2 + (ky_2 - ky_1)^2 + (kz_2 - kz_1)^2 = \\ &= k^2 \cdot ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2) = k^2 \cdot AB^2: \end{aligned}$$

Այստեղից՝ $A'B' = k \cdot AB$, իսկ սա էլ հենց նշանակում է, որ նշված ձևափոխությունը մնանության ձևափոխություն է:

Դիցուք այժմ S -ը բուրգի գագաթն է, A -ն՝ հիմքի գագաթներից մեկը, իսկ A' -ը՝ հատող հարթության և բուրգի SA կողի հատման կետը (նկ. 8): Դիտարկենք տարածության մեջ հոմոտետիայի ձևափոխության S կենտրոնով

և $k = \frac{SA'}{SA}$ գործակցով: Այդ ձևափոխության

դեպքում բուրգի հիմքի հարթությունը անցնում է A' կետով անցնող և նրան զուգահեռ

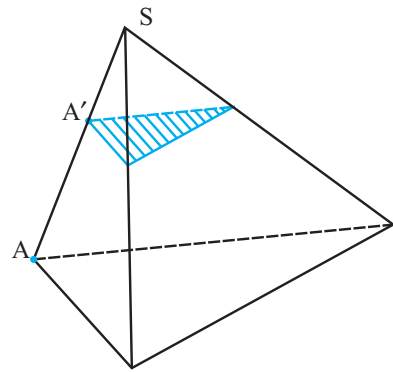
հարթության (տես 11-րդ դաս. էջ 6), այսինքն բուրգի հատող հարթությանը և հետևաբար ամբողջ բուրգը արտապատկերվում է այդ հարթությունով անջատված փոքր բուրգի վրա: Եվ քանի որ հոմոտետիան մնանության ձևափոխություն է, ապա հատումից ստացված փոքր բուրգը մնան է սկզբնական բուրգին: ▽

Երկու մնան բազմանիստերի մեջ ցանկացած երկու համապատասխան կողերի երկարությունների հարաբերությունը հավասար է մնանության գործակցին:

Մենք գիտենք, որ մնան պատկերների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է մնանության գործակցի քառակուսուն: Երկու մնան բազմանիստերի ծավալների հարաբերության համար ճիշտ է հետևյալ պնդումը. (մնանության սկզբունքը ծավալների համար):

Երկու մնան բազմանիստերի ծավալների հարաբերությունը հավասար է մնանության գործակցի խորանարդին:

Նմանության այս սկզբունքի իրավացիությունը երկու իրար մնան զուգահեռանիստների համար անմիջապես հետևում է դրանց համար մեր ստացած ծավալների բանաձևերից: Կամայական բազմանիստերի համար մնանության սկզբունքի ապացույցը դժվար չէ, բայց ծավալում է. (Վերցնենք երկու իրար մնան բազմանիստեր և դրանցից մեկը «լցնենք» ավելի ու ավելի փոքր զուգահեռանիստներով: Դրանց քանակի մեծացումով նրանց ընդհանուր ծավալը «մոտենում է» նրանցով լցվող բազմանիստի ծավալին: Այժմ վերցնենք մնան բազմանիստը և սկսենք այն լցնել համապատասխան մնան զուգահեռանիստներով և այլն): Նմանության սկզբունքը ճիշտ է նաև ցանկացած իրար մնան մարմինների համար:



Նկ. 8



1. (կ) Բուրգի կողմնային կողի վրա վերցված են երկու կետեր, որոնք այդ կողը բաժանում են երեք հավասար մասերի: Այդ կետերով տարված են բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթություններ: Գտեք բուրգի այդ հարթությունների միջև գտնվող մասի ծավալը, եթե ամբողջ բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի:

2. (օ) 1 շառավղով գնդի կենտրոնը գտնվում է α մեծությամբ երկնիստ անկյան կողի վրա: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որի ծավալը հավասար է երկնիստ անկյան մեջ գտնվող սկզբնական գնդի մասի ծավալին:

3. (կ) Բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը բուրգի ծավալը բաժանում է երկու հավասար մասերի: Ի՞նչ հարաբերությամբ է այդ հարթությունը բաժանում բուրգի կողմնային կողերը:

4. Բուրգի հիմքի մակերեսը հավասար է 3, բուրգի ծավալը նույնպես 3 է: Տարված են բուրգի հիմքին զուգահեռ երկու հարթություններ: Ստացված հատույթների մակերեսները հավասար են 1 և 2: Գտեք բուրգի այն մասի ծավալը, որը գտնվում է այդ հարթությունների միջև:

8.5 Բուրգի և հատած բուրգի ծավալները

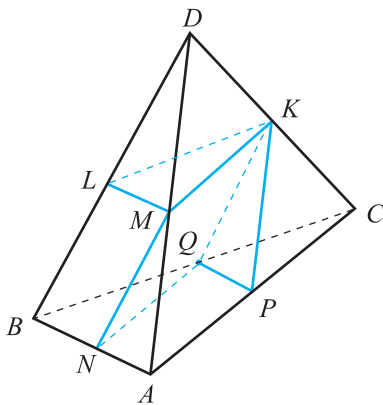
Նախորդ պարագրաֆում ձևակերպված նմանության սկզբունքը հնարավորություն է տալիս ստանալ բուրգի ծավալի բանաձևը:

Թեորեմ 8.4 (Բուրգի ծավալի հիմնական բանաձևը)

Բուրգի ծավալը կարելի է հաշվել

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \quad (4)$$

բանաձևով, որտեղ S -ը բուրգի հիմքի մակերեսն է, h -ը՝ նրա բարձրությունը:



Նկ. 9

Ապացույց. Դիտարկենք ABCD եռանկյուն բուրգը: Դիցուք ABC հիմքի մակերեսը S է, իսկ նրան տարված բարձրությունը՝ h : Նշանակենք այդ բուրգի կողերի միջնակետերը, ինչպես նկ. 9-ում է: Միացնելով այդ միջնակետերը մենք բուրգը կտրոհենք չորս բազմանիստների՝ KMLD և CPQK երկու եռանկյուն բուրգերի և QNBKML, PQKANM երկու եռանկյուն

պրիզմաների: Եթե V -ն $ABCD$ բուրգի ծավալն է, ապա, ըստ մմանության սկզբունքի, $KMLD$ և $CPQK$ բուրգերի ծավալները հավասար են

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{8} V:$$

$QNBKML$ պրիզմայի ծավալը գտնենք ըստ (2) բանաձևի: QNB հիմքի մակերեսը հավասար է $\frac{S}{4}$, իսկ պրիզմայի բարձրությունը $\frac{h}{2}$ է: Նշանակում է այդ պրիզմայի ծավալը հավասար է $\frac{S}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} \cdot Sh$: Երկրորդ պրիզմայի ծավալը հաշվելու համար օգտվենք (3) բանաձևից: Այդ պրիզմայի $APQN$ կողմնային միստի մակերեսը հավասար է $\frac{S}{4}$, իսկ KM կողի հեռավորությունը այդ միստից հավասար է $\frac{h}{2}$: Ուստի այդ պրիզմայի ծավալը հավասար է $\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} Sh$:

Այսպիսով, ներկայացնելով սկզբնական բուրգի V ծավալը նշված երկու բուրգերի և երկու պրիզմաների ծավալների գումարի տեսքով, կստանանք՝

$$V = 2 \cdot \frac{V}{8} + 2 \cdot \frac{Sh}{8}, \text{ որտեղից } V = \frac{1}{3} Sh:$$

Այսպիսով, եռանկյուն բուրգերի համար (4) բանաձևը ճիշտ է: Նշանակում է, այն ճիշտ է ցանկացած բուրգերի համար լորովիետոն ցանկացած բուրգ կարելի է տրոհել միևնույն բարձրությամբ եռանկյան բուրգերի՝ եթե նրա հիմքի բազմանկյունը որևէ կերպ տրոհենք եռանկյունների և այդ եռանկյունների զագաթները միացնենք բուրգի զագաթի հետ: ▽

Թեորեմ 8.4՝ (հատած բուրգի ծավալի հաշվման բանաձևը):

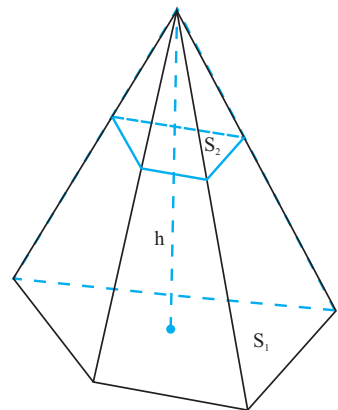
h բարձրություն և հիմքերի S_1 և S_2 մակերեսներ ունեցող հատած բուրգի ծավալը հաշվվում է

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2} \right)$$

բանաձևով:

Ապացույց: Դիտարկենք այն բուրգը, որից անջատված է տված հատած բուրգը (նկ. 10): Այդ բուրգի հիմքի մակերեսը S_1 է, իսկ բարձրությունը նշանակենք x -ով: Հատած բուրգի ծավալը հավասար է նշված բուրգի և S_2 հիմքի մակերես և $x - h$ բարձրություն ունեցող բուրգի ծավալների տարբերությանը: Ինչպես գիտենք, այդ բուրգերը նման են, ուստի՝

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h} \right)^2: \text{ Այստեղից՝ } x = \frac{h \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}:$$



Նկ. 10

Ուրեմն հատած բուրգի ծավալը՝

$$V = \frac{1}{3} \left[S_1 \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2 \left(\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h \right) \right] = \frac{1}{3} h \frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \\ = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2):]$$



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Գտնել a կողով կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը:
 2. (կ) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է V : Գտեք $ABCC_1$, $ACA_1 D_1$, $ABDB_1$ բուրգերի ծավալները: Գտեք նաև այն բազմանիստի ծավալը, որի գագաթները տված զուգահեռանիստի նիստերի կենտրոններն են:
 3. (կ) Եռանկյուն բուրգի մի գագաթից ելնող կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են և հավասար են a , b և c : Գտեք բուրգի ծավալը:
 4. Գտեք եռանկյան բուրգի բարձրությունը, եթե նրա երեք կողմնային կողերը հավասար են 2, 3 և 4 և զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են:
 5. Գտեք կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի ծավալը, որի հիմքի կողը հավասար է 1, իսկ կողմնային կողը՝ 2:
 6. Գտեք եռանկյուն բուրգի ծավալը, որի հիմք կողերը հավասար են 2, իսկ վեցերորդ կողը՝ $\sqrt{6}$:
 7. Երկու խաչվող ուղիղներով տեղաշարժվում են երկու հատվածներ (յուրաքանչյուրի երկարությունը հաստատուն է): Ապացուցեք, որ այդ հատվածների ծայրակետերը գագաթներ ունեցող տետրաեդրի ծավալը հաստատուն է:
 8. Դիցուք a , b , h , R , r և Q -ն համապատասխանաբար կանոնավոր բուրգի հիմքի կողը, կողմնային կողը, բարձրությունը, արտագծած գնդի շառավիղը, ներգծած գնդի շառավիղը և կողմնային նիստի մակերեսը արտահայտող մեծություններն են: Դիտարկենք երկու դեպք՝ ա) եռանկյուն բուրգ, բ) քառանկյուն բուրգ: Յուրաքանչյուր դեպքի համար բուրգի ծավալը արտահայտեք նշված մեծություններից ցանկացած երկուսով: Աշխատանքի արդյունքը ձևավորեք 6×6 տիպի աղյուսակով. աղյուսակի եզրերով (վերևից և աջից) գրեք նշված մեծությունները, իսկ աղյուսակի բոլոր վանդակներում (բացի անկյունագծի վրա գտնվող վանդակներից) գրեք համապատասխան բանաձևերը, ընդ որում՝ անկյունագծից վերև ա) դեպքի համար ստացված բանաձևերը, իսկ անկյունագծից ներքև՝ բ) դեպքի համար ստացվածները:
- Դիտողություն.** b և r , R և r , Q և R , Q և r զույգերին համապատասխանող վանդակները կարող եք չլրացնել:

9. (կ.օ) Դիցուք a, b, h, R, r և Q -ն նախորդ խնդրում նշված մեծություններն են, իսկ α, β, γ և φ համապատասխանաբար հետևյալ անկյունների մեծությունները՝ զագաթի հարթ անկյունը, կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը, կողմնային նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը և կանոնավոր եռանկյուն բուրգի երկու կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը: Արտահայտեք կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը բոլոր հնարավոր մեծությունների գույգերով, որոնցից մեկը վերցվում է առաջին խմբի մեծություններից ($a, b, \dots$), իսկ մյուսը՝ երկրորդ խմբի մեծություններից ($\alpha, \beta, \dots$): Արդյունքը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:

10. Լուծեք խնդիր, որը ստացվում է 9-րդ խնդրից փոխարինելով «կանոնավոր եռանկյան բուրգ» բառերը «կանոնավոր քառանկյուն բուրգ» բառերով:

11. Դիցուք $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ -ը միավոր խորանարդ է: Գտեք $AC B_1 D_1$ և $A_1 C_1 B D$ բուրգերի ընդհանուր մասի ծավալը:

12. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում խորանարդի ծավալը այն հարթությունը, որը ուղղահայաց է նրա անկյունագծին և բաժանում է այդ անկյունագիծը ա) 2:1 հարաբերությամբ բ) 3:1 հարաբերությամբ:

13.(օ) Դիտարկենք $ABCD$ ուղղանկյունը, որում $AB = 2$, $BC = 3$: KM հատվածը զուգահեռ է AB -ին և գտնվում է $ABCD$ հարթությունից 1 հեռավորության վրա, $KM = 5$: Գտեք $ABCDKM$ բազմանիստի ծավալը:

14.(դ) Գոյություն ունի՞ արդյոք եռանկյուն բուրգ, որի բարձրությունները հավասար են 1, 2, 3 և 6:

15.(դ) $ABCD$ բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի: AB -ին և CD -ին զուգահեռ երկու հարթություններ բաժանում են BC կողը երեք հավասար մասերի: Գտեք բուրգի այն մասի ծավալը, որը գտնվում է այդ երկու հարթությունների միջև:

8.6 Բազմանիստերի ծավալների հաշվումը

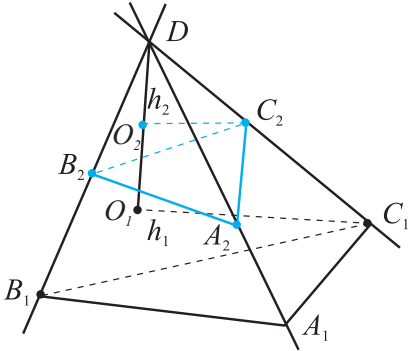
Այս պարագրաֆում կստացվեն բանաձևեր, որոնք հարմար են որոշ բազմանիստերի, և առաջին հերթին տետրաեդրի, ծավալների հաշվման համար: Բայց սկզբում ապացուցենք մի օգտակար թեորեմ, որը հաճախ օգտագործում են տարբեր տարածաչափական խնդիրներ լուծելիս:

ԹԵՈՐԵՄ 8.5 (Եռանկյան բուրգերի ծավալների հարաբերության մասին)

Դիտարկենք երեք ուղիներ, որոնք չեն գտնվում մի հարթության մեջ և անցնում են D ընդհանուր կետով: Դիցուք A_1 և A_2 -ը առաջին ուղղի վրա գտնվող, B_1 և B_2 -ը երկրորդ ուղղի վրա գտնվող, իսկ C_1 և C_2 -ը երրորդ ուղղի վրա գտնվող ցանկացած երկու կետեր են, V_1 -ը $A_1 B_1 C_1 D$ տետրաեդրի (եռանկյան բուրգի) ծավալն է, V_2 -ը՝ $A_2 B_2 C_2 D$ տետրաեդրի ծավալը:

Այդ դեպքում

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{DA_1}{DA_2} \cdot \frac{DB_1}{DB_2} \cdot \frac{DC_1}{DC_2}:$$



ۛۛ. 11

Ապացույց: h_1 և h_2 -ով նշանակենք համապատասխանաբար C_1 և C_2 կետերի հեռավորությունները DA_1B_1 հարթությունից (կամ որ նույնն է DA_2B_2 հարթությունից նկ. 11): Ունենք ($\angle DO_2C_2$ և DO_1C_1 եռանկյունների նմանությունից)

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{DC_1}{DC_2}, V_1 = \frac{1}{3} h_1 S_{DA_1B_1}, V_2 = \frac{1}{3} h_2 S_{DA_2B_2},$$

Հետևաբար,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{DA_1B_1}}{S_{DA_2B_2}} \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{DA_1}{DA_2} \cdot \frac{DB_1}{DB_2} \cdot \frac{DC_1}{DC_2}.$$

(Վերջին հավասարության մեջ մենք օգտվեցինք հարթաչափությունից հայտնի այն փաստից, որ եթե DA_1B_1 և DA_2B_2 եռանկյունների D գագաթի անկյունները կամ հավասար են, կամ նրանց գումարը 180° է, ապա նրանց մակերեսների հարաբերությունը հավասար է D գագաթից ելնող կողմերի հարաբերությանը):

Թեորեմ 8.6 (արտագծված բազմանիստի ծավալը)

Արտագծված բազմանիստի ծավալը կարելի է հաշվել

$$V = \frac{1}{3} r S \quad (5)$$

բանաձևով, որտեղ r -ը բազմանիստին ներգծված գնդի շառավիղն է, S -ը՝ բազմանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

Ապացույց: Միացնենք ներգծված գնդի կենտրոնը բազմանիստի բոլոր գագաթների հետ: Բազմանիստը կբաժանվի մի քանի բուրգերի: Յուրաքանչյուր բուրգի հիմքը բազմանիստի համապատասխան նիստն է, իսկ գագաթը՝ գնդի կենտրոնը: Յուրաքանչյուր այդպիսի բուրգի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S_k$, որտեղ S_k -ն համապատասխան նիստի մակերեսն է: Գումարելով այդ բուրգերի ծավալները կստանանք բազմանիստի ծավալը: Ընդ որում, S_k -երի գումարը հավասար է S -ի՝ բազմանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսին: ▽

Դիտողություն. (5) Բանաձևը ճիշտ է ցանկացած տետրաէդրի համար, որովհետև ցանկացած տետրաէդրին կարելի է ներգծել գունդ:

Հետևյալ երկու թեորեմներում պարունակվում են տետրաեդրի ծավալի հաշվման բանաձևեր:

Թեորեմ 8.7 (տետրաեդրի ծավալի հաշվումը նրա երկու միստերի մակերեսների, դրանցով կազմված երկնիստ անկյան և ընդհանուր կողի միջոցով)

Դիցուք P -ն և Q -ն տետրաեդրի երկու միստերի մակերեսներն են, a -ն այդ միստերի ընդհանուր կողի երկարությունը, α -ն այդ միստերով կազմված երկնիստ անկյան մեծությունը: Այդ դեպքում տետրաեդրի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \frac{2PQ \sin \alpha}{3a}: \quad (6)$$

Ապացույց: Դիտարկենք $ABCD$ տետրաեդրը, որի ABC և BCD միստերի մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են P և Q , α -ն այդ միստերով կազմված երկնիստ անկյունն է, $BC = a$ (նկ. 12): Դիցուք d -ն BCD եռանկյան BC կողմին տարված բարձրությունն է՝ $d = \frac{2Q}{a}$: Այդ դեպքում տետրաեդրի D գագաթից տարված բարձրությունը՝

$$h = d \sin \alpha = \frac{2Q}{a} \sin \alpha:$$

Նշանակում է,

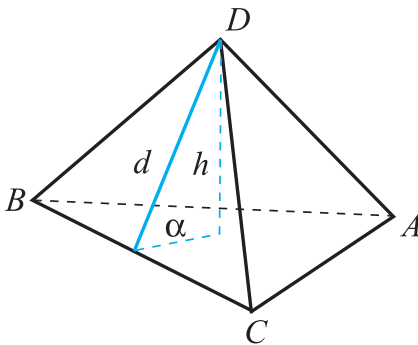
$$V = \frac{1}{3} P \cdot h = \frac{2PQ \sin \alpha}{3a}: \quad \nabla$$

Թեորեմ 8.8 (տետրաեդրի ծավալի հաշվումը նրա երկու հանդիպակաց կողերի, նրանց հեռավորության և կազմած անկյան միջոցով)

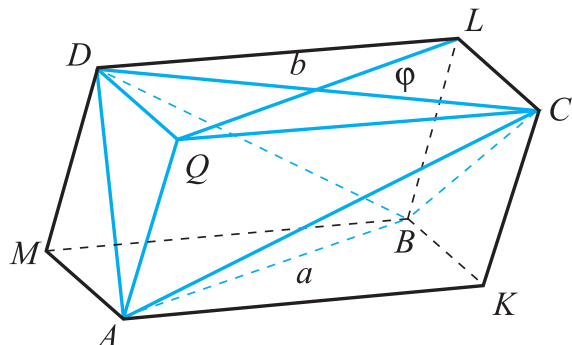
Դիցուք a -ն և b -ն տետրաեդրի երկու հանդիպակաց կողերի երկարություններն են, d -ն նրանց հեռավորությունը, իսկ φ -ն կազմած անկյունը: Այդ դեպքում տետրաեդրի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \frac{1}{6} abd \sin \varphi:$$

Ապացույց: Դիտարկենք $ABCD$ տետրաեդրը. դիցուք AB և CD -ն այն կողերն են, որոնց մասին ասված է թեորեմում: Լրացնենք տետրաեդրը մինչև



Նկ. 12



Նկ. 13

AKBMLCQD զուգահեռանիստ (նկ. 13), յուրաքանչյուր կողով տանելով հանդիպակաց կողմն զուգահեռ հարթություն:

AKBM և LCQD միստերի մակերեսները հավասար են $\frac{1}{2}ab \sin \varphi$, իսկ նրանց հեռավորությունը d է: Ուստի զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է $\frac{1}{2}abd \sin \varphi$: Կտրելով զուգահեռանիստից չորս եռանկյուն բուրգեր (ABCK և այլն) կստանանք սկզբնական ABCD տետրաէդրը: Առանձնացված յուրաքանչյուր բուրգի ծավալը կազմում է զուգահեռանիստի ծավալի $\frac{1}{6}$ մասը: Ուստի ABCD տետրաէդրի V ծավալը հավասար է AKBMLCQD զուգահեռանիստի ծավալի $\frac{1}{3}$ -ին, այսինքն՝ $V = \frac{1}{6}abd \sin \alpha$: ▽



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղահայաց են, իսկ կողմնային միստերի մակերեսները հավասար են S, P և Q: Գտեք բուրգի ծավալը:

2. (կ) a և b երկարություններով երկու հատվածներ տեղադրված են փոխուղահայաց խաչվող ուղիղների վրա: Այդ ուղիղների հեռավորությունը d է: Գտեք այդ հատվածների ծայրակետերը գազաթներ ունեցող տետրաէդրի ծավալը:

3. Գտեք ABCD բուրգի ծավալը, որում $AB = 4$, $BC = 5$, $AD = 6$, $BD = 7$, $CA = 8$, իսկ AB կողով երկնիստ անկյունը 60° է:

4. Բուրգի հինգ կողերը հավասար են 1-ի: Այդ բուրգի բոլոր գազաթները գտնվում են 1 շառավղով սֆերայի (գնդային մակերևույթի) վրա: Գտեք այդ բուրգի ծավալը:

5. (կ.օ) ABCD բուրգի ծավալը հավասար է V-ի: AD, DB և DC կողերի վրա վերցված են K, L և M կետերն այնպես, որ $DK = \frac{1}{3}DA$, $DL = \frac{2}{5}DB$, $DM = \frac{3}{4}DC$: P-ն AB-ի միջնակետն է, G-ն՝ ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետը: Գտեք հետևյալ բուրգերի ծավալները՝ KLMC, KLMP, KLMG, DLMG, BMPG:

6. (կ) ABCD բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի: AD, BD և CD կողերի վրա K, L և M կետերը վերցված են այնպես, որ $2AK = KD$, $BL = 2LD$, $2CM = 3MD$: Գտեք ABCKLM բազմանիստի ծավալը:

7. (կ) Եռանկյուն բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի: Գտեք նրա միստերի միջնագծերի հատման կետերը գազաթներ ունեցող բուրգի ծավալը:

8. ABCD բուրգի CD կողը հավասար է 1 և ուղղահայաց է ABC հարթությանը. $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = 90^\circ$: Գտեք ABCD բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը:

9. Միավոր խորանարդի նիստի անկյունագծի վրա վերցված են M և N կետերը, իսկ հարևան նիստի նրա հետ խաչվող անկյունագծի վրա՝ P և Q կետերը:

Հայտնի է, որ $MN = \frac{1}{2}$, $PQ = \frac{1}{3}$: Գտեք MNPQ տետրաեդրի ծավալը:

10. ABCD տետրաեդրի ծավալը հավասար է V-ի: AB կողի վրա վերցված են M և N կետերը, իսկ CD կողի վրա՝ P և Q կետերը: Հայտնի է, որ $MN = \alpha \cdot AB$, $PQ = \beta \cdot CD$: Գտեք MNPQ տետրաեդրի ծավալը:

11. ABCD տետրաեդրի ծավալը հավասար է V-ի: CD, DB և AB կողերի վրա K, L և M կետերը վերցված են այնպես, որ $2CK = CD$, $3DL = DB$, $5BM = 2AB$: Գտեք KLMD տետրաեդրի ծավալը:

12. (դ) V ծավալով ABCD տետրաեդրի AB, BC, CD և DA կողերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K, L, M և N կետերն այնպես, որ $2AK = AB$, $3BL = BC$, $4CM = CD$, $5DN = DA$: Գտեք NKLB, NMLB, KNMB, KLMB և KLMN տետրաեդրերի ծավալները:

13. Գլանի բարձրությունը հավասար է h -ի: Նրա յուրաքանչյուր հիմքին ներգծված է a կողմով կանոնավոր եռանկյուն, ընդ որում, դրանցից մեկը մյուսի նկատմամբ պտտված է 60° անկյունով: Գտեք այն բազմանիստի ծավալը, որի զագաթները այդ եռանկյունների զագաթներն են:

14. (դ) Եռանկյուն բուրգի կողմնալիմ մակերևույթի մակերեսը հավասար է 6-ի, իսկ հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են 60° : Բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը r է: Գտեք բուրգի ծավալը: Ի՞նչ սահմաններում կարող է փոփոխվել r -ը:

15. (օ) Դիցուք ABCD-ն ուղղանկյուն է, $AB = a$, $AC = b$: MN ուղիղը զուգահեռ է AB-ին, $MN = c$, MN-ի հեռավորությունը ABCD հարթությունից հավասար է h : Գտեք ABCDMN բազմանիստի ծավալը:

16. Դիցուք ABCDEF-ը a կողմով կանոնավոր վեցանկյուն է: MN հատվածը զուգահեռ է վեցանկյան կողմերից մեկին, հավասար է a և գտնվում է վեցանկյան հարթությունից h հեռավորության վրա: Գտեք ABCDEFMN մարմնի ծավալը:

17. (դ) 1 ծավալով ABCD տետրաեդրի AB, BC, CD և DA կողերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K, L, M և N կետերն այնպես, որ $AK = \frac{1}{3}AB$, $BL = \frac{1}{4}BC$, $CM = \frac{1}{5}CD$, $DN = \frac{1}{6}DA$: Գտեք KLMN տետրաեդրի ծավալը:

8.7* Ծավալի հատկությունների օգտագործումը խնդիրներ լուծելիս

Ծավալների հատկությունները, ծավալների հաշվման բանաձևերը կարող են օգտակար լինել տարբեր խնդիրներ լուծելիս, նույնիսկ այնպիսի խնդիրների, որոնցում ծավալի մասին չի հիշատակվում: Մասնավորապես (5) բանաձևը հարմար է բազմանիստին ներգծած գնդի շառավիղը գտնելու համար (եթե այդպիսի գունդ գոյություն ունի), (6) բանաձևով կարելի է գտնել տետրաէդրի երկնիստ անկյունները, (7) բանաձևը կարող է օգտագործվել խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը կամ հեռավորությունը որոշելու համար:

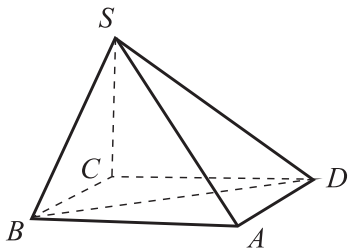
Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Խնդիր 1. SABCD բուրգի հիմքը $AB = a$ և $AD = b$ կողմերով ABCD ուղղանկյուն է, SC-ն բուրգի բարձրությունն է, $SC = h$: Ինչի^օ է հավասար ABS և ADS հարթությունների կազմած երկնիստ անկյունը:

Լուծում. Դիտարկենք ABDS բուրգը (նկ. 14): Նրա ծավալը հավասար է $\frac{1}{6}abh$: ABS և ADS նիստերի մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են

$$\frac{1}{2}a\sqrt{b^2 + h^2} \text{ և } \frac{1}{2}b\sqrt{a^2 + h^2}:$$

Բացի այդ, $AS = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$: Ըստ (7) բանաձևի, ունենք



Նկ. 14

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 + h^2} \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{a^2 + h^2} \cdot \sin \varphi}{3\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}} = \frac{1}{6}abh,$$

որտեղ φ -ն որոնելի անկյունն է:

Այսպիսով,

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + h^2} \cdot h}{\sqrt{b^2 + h^2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}};$$

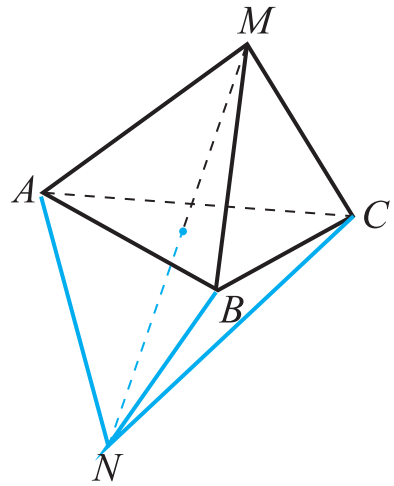
Բացի այդ, φ -ն բութ անկյուն է, որովհետև B կետի պրոյեկցիան ADS հարթության վրա գտնվում ADS եռանկյունուց դուրս:

$$\varphi = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + h^2} \cdot h}{\sqrt{a^2 + h^2} \cdot \sqrt{b^2 + h^2}} \quad \nabla$$

Հարթաչափության դասընթացում «Մակերես» թեմայի ուսումնասիրության ժամանակ դիտարկված էր մի եղանակ, ըստ որի, հատվածների երկարություն-

* -ով նշված պարագրաֆները նախատեսված չեն պարտադիր ուսուցման համար:

ների հարաբերությունը փոխարինվում էր համապատասխան մակերեսների հարաբերությամբ: Տարածության մեջ մենք հնարավորություն ունենք հատվածների հարաբերությունը փոխարինել ծավալների հարաբերությամբ: Օրինակ, եթե M և N կետերը դասավորված են ABC եռանկյան հարթության տարբեր կողմերում, ապա այն հարաբերությունը, որով ABC հարթությունը բաժանում է MN հատվածը հավասար է $ABCM$ և $ABCN$ բուրգերի ծավալների հարաբերությանը [ապացուցեք ինքնուրույն] (նկ. 15): Եռանկյան փոխարեն կարելի է վերցնել ցանկացած բազմանկյուն:



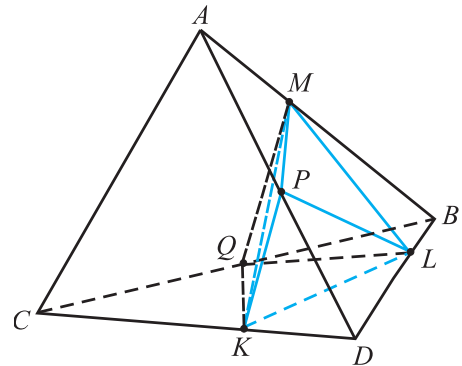
Նկ. 15

Խնդիր 2. $ABCD$ բուրգի AB , BD և DC կողերի վրա M , L , K կետերը վերցված են այնպես, որ $AM = \frac{1}{3} AB$, $BL = \frac{1}{4} BD$, $DK = \frac{2}{5} DC$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է KLM հարթությունը բաժանում AD և BC կողերի միջնակետերը միացնող հատվածը:

Լուծում. Դիցուք P -ն և Q -ն AD և BC կողերի միջնակետերն են (նկ. 16):

Խնդրի լուծման իդեան այն է, որ որոշել քե $MPLK$ և $KLQM$ բուրգերի ծավալները $ABCD$ բուրգի ծավալի n -ր մասն են կազմում, իսկ այնուհետև գտնել նրանց ծավալների հարաբերությունը:

Դիցուք ABD եռանկյան մակերեսը հավասար է S -ի: Այդ դեպքում DPL եռանկյան մակերեսը հավասար է



Նկ. 16

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S = \frac{3}{8} S$: BML եռանկյան մակերեսը հավասար է $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{6} S$: Այդպիսին կլինի նաև AMP եռանկյան մակերեսը $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S = \frac{1}{6} S\right)$: Այսպիսով, PML եռանկյան մակերեսը հավասար է՝

$$\left(1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) S = \frac{7}{24} S:$$

Իսկ քանի որ K կետի հեռավորությունը ABD հարթությունից կազմում է C կետից մինչև այդ նույն հարթությունը եղած հեռավորության $\frac{2}{5}$ մասը, ապա $PMLK$ բուրգի ծավալը հավասար է



1. (օ) ABCD տետրաէդրի ABC և ADC նիստերի մակերեսները հավասար են P և Q: Ապացուցենք, որ AC կողով երկնիստ անկյան կիսորդային հարթությունը BD կողը բաժանում է $P : Q$ հարաբերությամբ:

2. (օ) ABCD տետրաէդրի ABC և ADC նիստերի մակերեսները հավասար են P և Q, իսկ նրանցով կազմված երկնիստ անկյունը հավասար է α -ի: Գտեք այն եռանկյան մակերեսը, որով նշված անկյան կիսորդային հարթությունը հատում է բուրգը:

3. ABCD բուրգի հիմքում ընկած է ABC հավասարասրուն ուղղանկյան եռանկյունը, որի AB ներքնաձիգը հավասար է 4: Բուրգի բարձրությունը հավասար է 2-ի, իսկ նրա հիմքը համընկնում է AC կողի միջնակետին:

Գտեք ABD և ADC նիստերով կազմված երկնիստ անկյան մեծությունը:

4. ABCD բուրգի հիմքում ընկած է AC ներքնաձիգով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, DC-ն բուրգի բարձրությունն է, $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$: Գտեք ADB և ADC նիստերով կազմված երկնիստ անկյան մեծությունը:

5. SABCD բուրգի հիմքում ընկած է BC և AD հիմքերով սեղանը, ընդ որում, $BC = 2AD$: SA և SB կողերի վրա վերցված են K և L կետերն այնպես, որ $2SK = KA$, $3SL = LB$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում KLC հարթությունը SD կողը:

6. (դ) Եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսները հավասար են S, Q և P: Գտեք ներգծված գնդի շառավիղը: Գտեք նաև այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է բուրգի հիմքը և կողմնային նիստերի շարունակությունները:

7. (դ) ABCD բուրգի DA, DB և DC կողերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K, L և M կետերն այնպես, որ $DK = \frac{1}{2}DA$, $DL = \frac{2}{3}DB$, $DM = \frac{3}{4}DC$, G-ն ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Ի՞նչ հարաբերությամբ է KLM հարթությունը բաժանում DG հատվածը:

8. ABCD տետրաէդրի AB և CD կողերի վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ $AK = \frac{1}{3}AB$, $CM = \frac{3}{5}CD$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում KM հատվածը BC-ով և AD-ի միջնակետով անցնող հարթությունը:

9. (դ) Հարթությունը հատում է ABCD տետրաէդրի AB, BC, CD և DA կողերը համապատասխանաբար K, L, M և P կետերում: Հայտնի է, որ K-ն AB-ի միջնակետն է, $BL = \frac{1}{3}BC$, $CM = \frac{3}{4}CD$: Գտեք, թե ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում KM-ը LP հատվածը:

10. (դ) Բուրգի հիմքում ընկած է ուղղանկյուն: Բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են: Հարթությունը հատում է բուրգի բոլոր կողմնային կողերը կտրելով նրանցից a , b , c և d երկարությամբ հատվածներ (հաշված բուրգի գագաթից և շրջանցման ուղղությամբ): Ապացուցեք, որ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} :$$

11. (դ) SABCD բուրգի հիմքի ABCD քառանկյան անկյունագծերը հատվում են M կետում: ABM, BCM և CDM եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են 1, 2 և 6: A կետով անցնող հարթությունը հատում է SB և SC-ն K և M կետերում այնպես, որ $SK = \frac{1}{2} KB$, $SM = \frac{1}{3} MC$: Դիցուք այդ հարթությունը SD ուղիղը հատում է P կետում: Գտեք SP: SD-ն:

12. (դ) ABCD տետրաեդրին ներգծված գնդի շառավիղը R է: Հայտնի է նաև, որ ABC և ABD եռանկյունների մակերեսների տարբերությունը k անգամ մեծ է ABK եռանկյան մակերեսից, որտեղ K-ն CD կողի միջնակետն է:

Գտեք այն շրջանի շառավիղը, որով ABK հարթությունը հատում է այդ տետրաեդրն ներգծված գունդը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը հավասար է միավոր խորանարդի ծավալին: Գտնել այդ տետրաեդրի կողը:

2. Ուռուցիկ բազմանիստի գագաթները համընկնում են 1 ծավալով զուգահեռանիստի կողերի միջնակետերի հետ: Գտնել այդ բազմանիստի ծավալը:

3. Գտնել այն բազմանիստի ծավալը, որի գագաթները համընկնում են 1 ծավալով եռանկյուն բուրգի կողերի միջնակետերի հետ:

4. Գտնել 1 ծավալ ունեցող քառանկյուն բուրգի կողերի միջնակետերը գագաթ ունեցող բազմանիստի ծավալը:

5. Տրված է 1 ծավալով զուգահեռանիստ: Գտնել այն ուռուցիկ բազմանիստի ծավալը, որի չորս գագաթները համընկնում են զուգահեռանիստի մի նիստի գագաթների հետ, իսկ մյուս երկու գագաթները՝ այդ նիստի հանդիպակաց նիստի երկու գագաթների հետ:

6. Գտնել զուգահեռանիստի ծավալը, եթե նրա երկու նիստերը α անկյունով շեղանկյուններ են, իսկ մնացած նիստերը՝ միավոր քառակուսիներ:

7. Գտնել զուգահեռանիստի ծավալը, եթե նրա երեք անկյունագծերը փոխուղահայաց են և հավասար են a , b և c -ի:

8. Գտնել ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա անկյունագիծը հավասար է 1, իսկ կողերի երկարությունները հարաբերում են, ինչպես 1 : 2 : 3:

9. ABCDE բազմանիստի ABC նիստը 1 կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է: AD և CE կողերը ուղղահայաց են ABC հարթությանը և համապատասխանաբար հավասար են 1 և 2: Գտնել ABCDE բազմանիստի ծավալը:

10. Եռանկյուն բուրգի երկու խաչվող կողերը հավասար են 1 և 2, իսկ մնացած չորս կողերը հավասար են $\sqrt{2}$: Գտնել այդ բուրգի ծավալը և նրան ներգծած գնդի շառավիղը:

11. ABCD եռանկյուն բուրգի D գագաթը պրոյեկտվում է ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետի վրա: AB և CD կողերը հավասար են 3 և 4, իսկ նրանց հեռավորությունը 5 է: Գտնել բուրգի ծավալը:

12. Պրիզմայի հիմքերի մակերեսները հավասար են S: Հայտնի է, որ այդ պրիզմային կարելի է ներգծել 1 շառավղով գունդ: Գտնել այդ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը և ծավալը: S-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում խնդիրը լուծում ունի:

13. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում կանոնավոր քառանկյուն բուրգի ծավալը այն հարթությունը, որը անցնում է երկու հարևան կողմնային կողերի միջնակետերով և այդ կողերին չպատկանող գագաթով:

14. Եռանկյուն բուրգի մի գագաթից դուրս եկող երեք կողերի երկարությունները հավասար են 13, իսկ մնացած երեք կողերի երկարություններն են՝ 6, 8, 10: Գտնել այդ բուրգի ծավալը, ներգծած գնդի շառավիղը և բոլոր երկնիստ անկյունները:

15. SABC եռանկյուն բուրգի SA և SB կողերը հավասար են: SAC և SBC նիստերի մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են 3 և 5: SA կողին առընթեր երկնիստ անկյունը 60° է: Գտնել SB կողին առընթեր երկնիստ անկյունը:

16. Գտնել միավոր գնդին ներգծած կանոնավոր քառանկյուն բուրգի ծավալի մեծագույն արժեքը:

17. Միավոր գնդին ներգծված բոլոր հնարավոր կանոնավոր n-անկյուն բուրգերից դիտարկենք մեծագույն ծավալ ունեցող բուրգը: Ապացուցեք, որ այդ բուրգի բարձրությունը կախված չէ n-ից: Ինչի՞նչ է հավասար այդ բարձրությունը:

18. Միավոր խրանարդի երկու խաչվող կողերի վրա վերցված են $\frac{1}{2}$ երկարությամբ հատվածներ: Գտնել այդ հատվածների ծայրակետերը գագաթների ունեցող տետրաեդրի ծավալը:

19. Բոլոր հնարավոր վեցանկյուն բուրգերից, որոնց հիմքը 2 կողմով կանոնավոր վեցանկյուն է, իսկ երկու հարևան կողմնային կողերը հավասար են 3, վերցնենք այն բուրգը, որին արտագծած գնդի շառավիղը փոքրագույնն է: Գտնել այդ բուրգի ծավալը:

20. Եռանկյուն բուրգի գագաթներից մեկին հարակից բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են, իսկ այդ գագաթից դուրս եկող կողերի երկարությունները հավասար են a , b և c : Գտնել այն խորանարդի կողը, որի գագաթներից մեկը համընկնում է բուրգի նշված գագաթի հետ, նրան հարևան երեք գագաթները գտնվում են բուրգի նշված կողերի վրա, իսկ նրան հակադիր գագաթը գտնվում է բուրգի նրան հակադիր նիստի վրա:

21. Կանոնավոր տետրանգրի կողերի միջնակետերն ուղիղներով հաջորդաբար միացնելով կստանանք կանոնավոր օկտանգրի կողերը: Տետրանգրի կողը հավասար է a -ի: Գտնել օկտանգրի ծավալը և համեմատել այն տետրանգրի ծավալի հետ:

22. 1. Խորանարդ նիստերի կենտրոնները հանդիսանում են կանոնավոր օկտանգրի գագաթներ: Գտնել խորանարդի և օկտանգրի ծավալների հարաբերությունը:

2. Կանոնավոր օկտանգրի նիստերի կենտրոնները խորանարդի գագաթներ են: Գտնել օկտանգրի և խորանարդի ծավալների հարաբերությունը:

23. Բուրգի հիմքը 9 մ և 12 մ կողմերով ուղղանկյուն է, որի կողմնային կողերը 12,5 մ են: Գտնել ծավալը:

24. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է, որի հավասար կողմերը պարունակում են 6-ական սմ, իսկ երրորդ կողմը՝ 8 սմ: Կողմնային կողերը իրար հավասար են և յուրաքանչյուրը պարունակում է 9 սմ: Որոշել այդ բուրգի ծավալը:

25. Որոշել՝ 22,9 սմ հավասար կողմնային կողեր ունեցող բուրգի ծավալը, որի հիմքը 39 սմ, 17 սմ, 28 սմ կողմեր ունեցող եռանկյուն է:

26. 1. Բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է հավասարասրուն եռանկյունը, որի հավասար կողմերը պարունակում են 39-ական սանտիմետր, իսկ երրորդ կողմը՝ 30 սմ: Հիմքի երկնիստ անկյուններն իրար հավասար են և պարունակում են 45° : Որոշել բուրգի ծավալը:

2. Բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է հավասարասրուն եռանկյունը, որի հավասար կողմերը պարունակում են 7-ական սանտիմետր, իսկ երրորդ կողմը՝ 6 սմ: Բուրգի գագաթը հավասարապես է հեռացված բուրգի հիմքի բոլոր կողմերից: Այդ հեռավորությունը հարաբերում է բուրգի բարձրությանն այնպես, ինչպես 5 : 4: Որոշել բուրգի ծավալը:

27. Եռանկյուն բուրգի կողերից մեկը հավասար է 4-ի, մնացածներից յուրաքանչյուրը՝ 3-ի: Գտնել ծավալը:

28. SABC բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է ABC եռանկյունը, որի մեջ $AB = 15$ սմ, $BC = 15$ սմ և $AC = 18$ սմ: SAB և SAC նիստերն ուղղահայաց են ABC հերթությանը, իսկ SBC նիստն այդ հերթության հետ կազմում է 45° -ի անկյուն: Որոշել բուրգի ծավալն ու BSC նիստի մակերեսը:

29. Բուրգի հիմքն ուղղանկյուն է, որի մակերեսը հավասար է 1 մ^2 -ի, երկու կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքին, իսկ մյուս երկուսը թեքված են 30° և 60° անկյուններով: Գտնել ծավալը:

30. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի զուգահեռ կողմերը հավասար են 3 սմ-ի և 5 սմ-ի, իսկ կողմնային կողմը՝ 7 սմ-ի: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով, և մեծ կողմնային կողը հավասար է 10 սմ-ի: Որոշել բուրգի ծավալը:

31. Եռանկյուն բուրգի մեջ հիմքի մի կողմը հավասար է 16 սմ-ի, նրա հանդիպակաց կողմնային կողը 18 սմ է. մնացած չորս կողերից յուրաքանչյուրը 17 սմ է: Որոշել այդ բուրգի ծավալը:

32. Բուրգի բարձրությունը հիմքին զուգահեռ հարթություններով բաժանված է հինգ հավասար մասերի: Ի՞նչ հարաբերություններով է բաժանվել բուրգի ծավալը:

33. Հատած բուրգի հիմքերի մակերեսներն են 245 մ^2 և 80 մ^2 , իսկ լրիվ բուրգի բարձրությունը՝ 35 մ: Որոշել հատած բուրգի ծավալը:

34. 1. Հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է 15 մ-ի, նրա ծավալը՝ 475 մ^3 -ի: Հիմքերի մակերեսները հարաբերում են այնպես, ինչպես $4 : 9$: Որոշել այդ մակերեսները:

2. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի ծավալը հավասար է 430 մ^3 -ի, բարձրությունը՝ 10 մ-ի, իսկ մի հիմքի կողմը՝ 8 մ-ի: Որոշել մյուս հիմքի կողմը:

35. Եռանկյուն հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է 10 մ-ի, հիմքերից մեկի կողմերն են 27 մ, 29 մ և 52 մ, մյուս հիմքի պարագիծը՝ 72 մ: Որոշել հատած բուրգի ծավալը:

36. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի հարթագիծն ու հիմքերի կողմերը հարաբերում են ինչպես $5 : 8 : 2$, իսկ ծավալը $1\frac{3}{4} \text{ մ}^3$ է: Որոշել նրա լրիվ մակերևույթը:

37. Որոշել կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի ծավալը, եթե նրա անկյունագիծը 9 սմ է, իսկ հիմքերի կողմերը, 7 սմ և 5 սմ:

38. Որոշել կանոնավոր վեցանկյուն հատած բուրգի ծավալը, եթե նրա հիմքի կողմերն են a և b , կողմնային կողն ստորին հիմքի հարթության հետ կազմում է 30° -ի անկյուն:

39. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգը երկու հարթություններով բաժանված է երեք մասի: Հարթությունները տարված են փոքր հիմքի երկու հանդիպակաց կողմերով ուղղահայաց մեծ հիմքի հարթությանը: Որոշել յուրաքանչյուր մասի ծավալը, եթե հատած բուրգի բարձրությունը 4 սմ է, իսկ հիմքերի կողմերն են 2 սմ և 5 սմ:

40. Եռանկյան հատած բուրգի մեջ փոքր հիմքի կողմով նրան հակադիր կողմնային կողին զուգահեռ մի հարթություն է տարված: Ի՞նչ հարաբերությամբ կբաժանվի հատած բուրգի ծավալը, եթե հիմքերի համապատասխան կողմերի հարաբերությունն է $1 : 2$:

41. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգը երկու հակադիր կողերից հատված է երկու հարթություններով, որոնք տարված են վերին հիմքի անկյունագծի ծայրերից՝ ուղղահայաց այդ անկյունագծին: Որոշել հատած բուրգի մնացած մասի ծավալը, եթե հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է h , իսկ հիմքերի կողմերը՝ a -ի և b -ի:

42. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգից կտրված է նրա մի մասը՝ երկու բուրգերի ձևով, որոնք հատած բուրգի անկյունագծերի հատման կետում ունեն ընդհանուր գագաձ և որոնց հիմքերը հատած բուրգի հիմքերն են: Որոշել հատած բուրգի մնացած մասի ծավալը, եթե բուրգի բարձրությունն է h , իսկ հիմքերի կողմերն են a և b :

43. Քառանկյուն հատած բուրգի անկյունագծերի հատման կետով հիմքերին զուգահեռ հարթություն է տարված: Հիմքերի կողմերն են 6 մ և 3 մ, բուրգի բարձրությունը՝ 9 մ: Գտնել հատույթի անկյունագիծը և բուրգի յուրաքանչյուր մասի ծավալը:

44. Տրված են հատած բուրգի հիմքերի մակերեսները՝ Q և q ու նրա բարձրությունը՝ h : Որոշել լրիվ բուրգի ծավալը և նրանից կտրված վերին մասի ծավալը:

45. V ծավալ ունեցող կանոնավոր քառանկյուն բուրգը հատված է բուրգի բարձրությամբ անցնող հարթությամբ: Գտեք բուրգի ստացված մասերի ծավալները:

46. Գտեք այն բուրգի ծավալը, որի հիմքը V ծավալ ունեցող խորանարդի նիստ է, իսկ գագաթը գտնվում է այդ խորանարդի անկյունագծերի հատման կետում:

47. Պրիզմայի հիմքը սեղան է, որի զուգահեռ կողմերն են 44 սմ և 28 սմ, իսկ ոչ զուգահեռները՝ 17-ական սմ: Պրիզմայի անկյունագծային հատույթներից մեկը ուղղահայաց է հիմքին և 450 անկյունով շեղանկյուն է: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

48. Թեք եռանկյուն պրիզմայի բոլոր ինը կողերը ունեն a երկարություն: Պրիզմայի ծավալը հավասար է V -ի: Գտեք կողմնային կողի և հիմքի հարթության միջև եղած անկյունը:

49. Պրիզմայի հիմքը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է: Նրա էջերից մեկով անցնող կողմնային նիստը a կողմ ունեցող քառակուսի է և հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

50. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի սուր անկյուններից մեկը հավասար է α -ի: Բուրգի յուրաքանչյուր կողմնային կող հավասար է b -ի և հիմքի հարթության հետ կազմում է β անկյուն: Գտեք բուրգի ծավալը:

51. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի անկյունագծային հատույթներից մեկը բուրգը բաժանում է երկու ոչ համընկնելի մասերի: Գտեք այդ մասերի ծավալների հարաբերությունը:

52. Բուրգի հիմքը a կողմ ունեցող կանոնավոր եռանկյուն է: Կողմնային նիստերից մեկը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը, իսկ մյուս երկու կողմնային նիստերը հիմքի հետ կազմում են α անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը և մեծ կողմնային նիստի մակերեսը:

53. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի զուգահեռ կողմերն են a և b ($a > b$): Հիմքի կողմերին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են φ -ի: Գտեք բուրգի ծավալը:

54. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերն են a և b ($a > b$): Մեծ հիմքի կողմին առընթեր երկնիստ անկյունը α է: Գտեք բուրգի ծավալը:

55. Գտեք կանոնավոր վեցանկյուն հատած բուրգի ծավալը, որի հիմքերի կողմերը հարաբերում են ինչպես $1 : 2$, իսկ b երկարություն ունեցող կողմնային կողը հիմքի հարթության հատ կազմում է 60° -ի անկյուն:

56. Ուղիղ գուգահեռանիստի բարձրությունը H է, հիմքի կողմերն են a և b : Ինչպիսի՞ն պետք է լինի կողմնային կողին առընթեր փ երկնիստ անկյունը, որպեսզի գուգահեռանիստի ծավալը լինի ամենամեծը:

57. Թեք գուգահեռանիստի կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է α -ի: Այդ կողի հեռավորությունները երկու հարևան կողերից հավասար են a և b , կողմնային կողը՝ c : Գտեք գուգահեռանիստի ծավալը:

58. Պրիզմայի հիմքը a էջ ունեցող հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունն է: Ներքնաձիգին հանդիպակաց կողմնային կողը էջերի հետ կազմում է α և β անկյուններ: Գտեք պրիզմայի ծավալը, եթե կողմնային կողի երկարությունը b է:

59. Բուրգի հիմքին գուգահեռ հատույթը նրան բաժանում է երկու մասերի, որոնք ունեն հավասար ծավալներ: Գտեք կողմնային մակերևույթի բաժանված մասերի մակերեսների հարաբերությունը:

60. Խորանարդի մի գագաթից դուրս եկող երեք կողերից յուրաքանչյուրի միջնակետերով տարված են հատույթներ: Գտեք ստացված բազմանիստի ծավալն ու մակերևույթի մակերեսը, եթե խորանարդի կողը հավասար է a -ի:

61. Կանոնավոր քառանկյուն $SABCD$ բուրգի կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն: B գագաթով տարված է հարթություն, որն ուղղահայաց է SD կողին: Տրված բուրգի ծավալի n -ր մասն է կազմում հատույթով անջատված քառանկյուն բուրգի ծավալը:

62. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը h է և կողմնային նիստի հետ կազմում է a անկյուն: Բուրգի հիմքի կողմով տարված է դիմացի նիստին ուղղահայաց հարթություն: Գտեք տրված բուրգից այդ հարթությամբ հատված ծավալը:

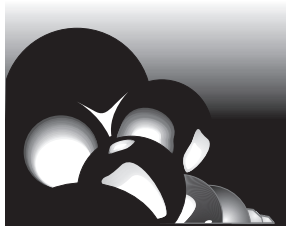
63. Գտեք այն կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, որի հիմքի կողմը հավասար է a -ի և կողմնային նիստի հետ կազմում է α անկյուն:

64. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն սեղան է, որի ոչ գուգահեռ կողմերից մեծի երկարությունը 12 սմ է, իսկ փոքր անկյունը՝ 30° : Բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված են միատեսակ, կողմնային մակերևույթի մակերեսը 90 սմ² է: Գտեք բուրգի ծավալը:

65. $SABC$ բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է՝ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$: Կողմնային կողերը միատեսակ են թեքված հիմքի հարթության նկատմամբ: SBC նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը β է: Գտեք բուրգի ծավալը: Հաշվեք $c = 18$ սմ, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ դեպքում:

66. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի գուգահեռ կողմերն են a և b ($a > b$), իսկ անկյունագծերի համընկնելի հատվածների միջև եղած անկյունը հավասար է α -ի: Բուրգի բարձրությունը անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով: Հիմքի գուգահեռ կողմերին առընթեր երկնիստ անկյունները հարաբերում են ինչպես $1 : 2$: Գտեք բուրգի ծավալը:]

ՊՏՏԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՅԹՆԵՐԸ



9.1. Գլանի, կոնի և հատած կոնի ծավալները

Դիտարկեք R հիմքի շառավիղով և h բարձրությամբ գլան: Ներգծենք նրան կանոնավոր n -անկյան պրիզմա (նկ. 18): n -ի աճման հետ այդ պրիզմայի ծավալը կձգտի գլանի ծավալին:⁽¹⁾ Սակայն ցանկացած պրիզմայի ծավալը որոշվում է

$$V = S \cdot h$$

բանաձևով, որտեղ S -ը պրիզմայի հիմքի մակերեսն է: n -ի աճման հետ պրիզմայի հիմքի մակերեսը ձգտում է գլանի հիմքի մակերեսին: Այստեղից հետևում է, որ գլանի ծավալի համար նույնպես ճիշտ է նշված բանաձևը: Արտահայտելով հիմքի մակերեսը R -ով, ստանում ենք, որ *գլանի ծավալը* որոշվում է

$$V = \pi R^2 \cdot h \quad (8)$$

բանաձևով:

Ճիշտ նույն ձևով, դիտարկելով բուրգեր, որոնց հիմքերը կոնի հիմքին ներգծված կանոնավոր բազմանկյուններ են, հանգում ենք այն եզրակացության, որ բուրգի ծավալը արտահայտող բանաձևը ճիշտ է մաս կոնի համար: Այսպիսով, *կոնի ծավալը* կարելի է գտնել

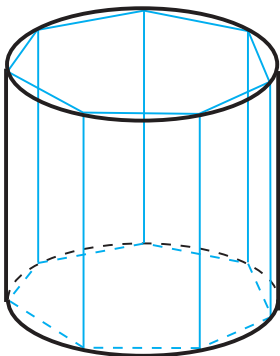
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \quad (9)$$

բանաձևով, որտեղ R -ը կոնի հիմքի շառավիղն է, h -ը նրա բարձրությունը: *Ցանկացած գլանի ծավալը* հաշվում են հետևյալ բանաձևով

$$V = S_{\text{հիմք}} \cdot h ,$$

իսկ *ցանկացած կոնի ծավալը*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{հիմք}} \cdot h \text{ բանաձևով:}$$



Նկ. 18

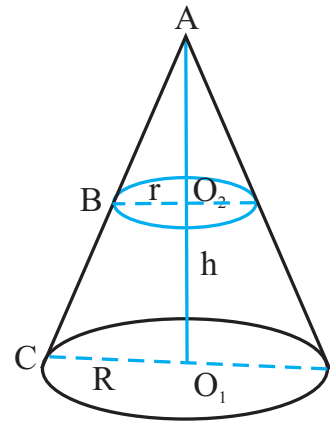
⁽¹⁾ [այս պնդման հիմնավորումը դուրս է դալորցական մաթեմատիկայի ծրագրերից:]

Յույց տանք, որ R և r հիմքերի շառավիղներով և h բարձրությամբ հատած կոնի ծավալն արտահայտվում է

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

բանաձևով:

Դիցուք հատած կոնը ստացվել է $AO_1 = x$ բարձրությամբ և հիմքի R շառավիղ ունեցող կոնից (նկ. 19): Հատած կոնի ծավալը հավասար է այդ կոնի և հիմքի r շառավիղով և $AO_2 = x - h$ բարձրությամբ կոնների ծավալների տարբերությանը:



Նկ. 19

ACO_1 և ABO_2 եռանկյունների նմանությունից ստանում ենք՝ $\frac{x}{x-h} = \frac{R}{r}$:

Այստեղից՝ $x = \frac{hR}{R-r}$:

Ուստի հատած կոնի ծավալը հավասար կլինի՝

$$V = \frac{1}{3} \left[\pi R^2 \frac{hR}{R-r} - \pi r^2 \left(\frac{hR}{R-r} - h \right) \right] = \frac{1}{3} \pi h \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2): \nabla$$

9.2. Կավալյերիի սկզբունքը և գնդի ծավալը

Նմանության սկզբունքը, որի օգնությամբ ստացվեց բուրգի ծավալը, կարող է դուրս բերվել ուրիշ, ավելի ընդհանուր սկզբունքից՝ Կավալյերիի սկզբունքից (Բոնավենտուրա Կավալյերի՝ XVII դարի իտալացի գիտնական, Գալիլեյի աշակերտը: Կավալյերիի հիմնական աշխատությունը՝ «Երկրաչափությունը» տպագրվել է 1635թ.: Հենց այդտեղ է ձևակերպված մի պնդում, որը հետագայում ստացել է «Կավալյերիի սկզբունք» անվանումը):

Բերենք այդ սկզբունքի հնարավոր ձևակերպումներից մեկը՝

Կավալյերիի սկզբունքը

Եթե երկու մարմիններ տարածության մեջ հնարավոր է դասավորել այնպես, որ տված հարթությամբ զուգահեռ ցանկացած հարթություն հատում է այդ մարմինները միևնույն մակերեսն ունեցող պատկերներով, ապա այդ մարմիններն ունեն հավասար ծավալներ:

Յույց տանք, թե ինչպես Կավալյերիի սկզբունքի օգնությամբ կարելի է ստանալ գնդի ծավալը արտահայտող բանաձև:

ԹԵՈՐԵՄ 9.1 (Գնդի ծավալի բանաձևը):

R շառավղով գնդի ծավալի համար տեղի ունի

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (10)$$

բանաձևը:

Ապացույց: Դիտարկենք գլան, որի առանցքային հատույթը $2R$ կողմով քառակուսի է և նրանից հեռացնենք երկու կոներ, որոնց ընդհանուր գագաթը գլանի կենտրոնն է, իսկ հիմքերը համընկնում են գլանի հիմքերի հետ (նկ. 20 ա): Ապացուցենք, որ ստացված մարմինը ունի նույն ծավալը ինչ-որ R շառավղով գունդը:

Վերցնենք այդպիսի գունդ և տեղադրենք այնպես, որ այն շոշափի գլանի հիմքերի հարթությունները: (20 բ նկարում պատկերված է դիտարկվող մարմնի առանցքային հատույթը և գնդի հատույթը նույն հարթությամբ: Հորիզոնական ուղիղը գլանի հիմքերին զուգահեռ հարթության և նշված երկու մարմինները հատող հարթության «հետքն» է): Դիտարկենք գլանի հիմքերին զուգահեռ և գլանի ու գնդի կենտրոններից x հեռավորության վրա գտնվող հարթությունը: Այդ հարթությանը գունդը կհատի $\rho = \sqrt{R^2 - x^2}$ շառավղով շրջանագծով: Հատույթի մակերեսը կլինի $\pi \rho^2 = \pi \cdot (R^2 - x^2)$: Կառուցված մարմնի հատույթը նշված հարթությամբ R արտաքին շառավղով և x ներքին շառավղով օղակ է: Օղակի մակերեսը հավասար է R և x շառավղիներով շրջանների մակերեսների տարբերությունը՝

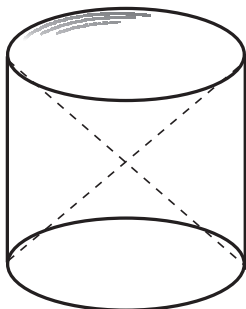
$$\pi R^2 - \pi x^2 = \pi \rho^2:$$

Այսպիսով, «ստացվեց, որ գլանի հիմքի հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթությամբ» այս մարմինների հատույթների մակերեսները իրար հավասար են: Այժմ, համաձայն Կավալյերիի սկզբունքի, գտնում ենք, որ R շառավղով գնդի ծավալը հավասար է գլանի և երկու կոների ծավալների տարբերությանը՝

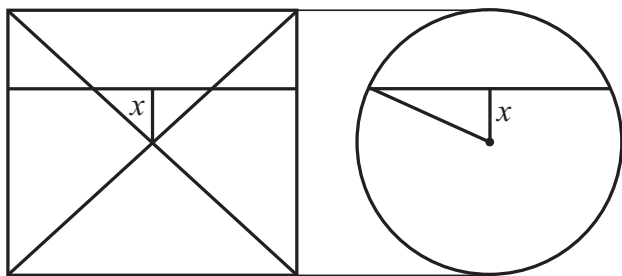
$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

(10) բանաձևը ապացուցված է: ▽

Դիտողություն. Այս պարագրաֆում ձևակերպած Կավալյերիի սկզբունքը



ա)



բ)

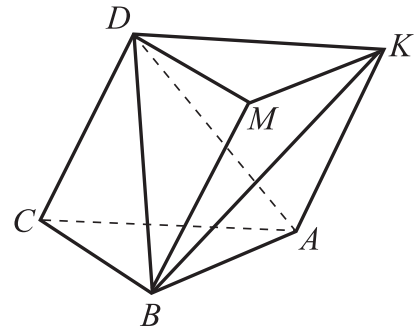
Նկ. 20

կարելի է փոքր-ինչ ուժեղացնել. եթե երկու մարմիններ տարածության մեջ կարելի է դասավորել այնպես, որ տված հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթություն հատում է այդ մարմինները այնպիսի պատկերներով, որոնց մակերեսների հարաբերությունը հաստատուն է, ապա այդ հաստատունին հավասար կլինի նաև այդ մարմինների ծավալների հարաբերությունը:

Յույց տանք, թե ինչպես Կավալյերիի սկզբունքի օգնությամբ կարելի է ստանալ բուրգի ծավալի բանաձևը:

Նկատենք, որ Կավալյերիի սկզբունքից և 2.6 թեորեմից (բուրգի զուգահեռ հատույթների հատկությունը) հետևում է այսպիսի պնդում՝ *որ հավասար բարձրություններ և հավասարամեծ հիմքեր ունեցող երկու բուրգերի ծավալները հավասար են:*

Դիտարկենք այժմ ABCD եռանկյուն բուրգը: Լրակառուցենք այն մինչև ABCKMD պրիզման (նկ. 21)



Նկ. 21

Վերջին պնդումից բխում է, որ ABCD, ABKD, BMKD բուրգերն ունեն հավասար ծավալներ: Այն, որ ABCD և ABKD բուրգերի ծավալներն իրար հավասար են, դժվար չէ հասկանալ, եթե որպես նրանց հիմքեր դիտարկենք ACD և AKD եռանկյունները: Նմանապես, որպես հիմքեր համարելով ABK և BMK եռանկյունները, կապացուցենք ABKD և BMKD բուրգերի ծավալների հավասարությունը:

Ուստի, ABCD բուրգի ծավալը կազմում է ABCKMD պրիզմայի

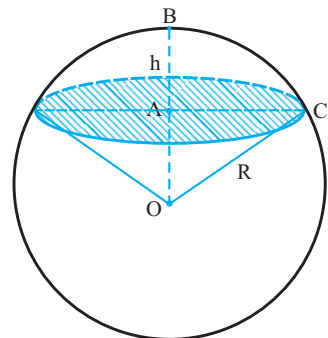
ծավալի $\frac{1}{3}$ մասը: Այսպիսով, մենք ևս մեկ անգամ ստացանք բուրգի ծավալի (4) բանաձևը:

9.3. Գնդի մասերի ծավալները

Ստանանք բանաձև գնդային սեգմենտի ծավալի հաշվման համար:

Սեգմենտի հիմքի շրջանագծի բոլոր կետերը միացնելով գնդի կենտրոնի հետ կստանանք կոնի կողմնային մակերևույթ: Դիտարկենք T գնդային սեկտորը, որը կազմված է նշված կոնի կողմնային մակերևույթից և սեգմենտի մակերևույթից (նկ. 22):

Նախ ապացուցենք, որ T գնդային սեկտորի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝



Նկ. 22

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot S \cdot R,$$

որտեղ S -ը սեգմենտի մակերևույթի մակերեսն է, R -ը՝ գնդի շառավիղը:

Իրոք, դիտարկենք n նիստ ունեցող բազմանիստ, որը իր մեջ պարունակում է գունդը և որի բոլոր նիստերը շոշափում են գնդային մակերևույթը: Ընդ որում այդ նիստերտի քանակի աճմանը զուգընթաց բազմանիստի գագաթները պետք է «մոտենան» սֆերայի մակերևույթին:⁽¹⁾

Դիտարկենք այդ բազմանիստի բոլոր այն նիստերը, որոնք դասավորված են սեգմենտի հիմքի շրջանագծի հարթության այն մասում, որտեղ գտնվում է սեգմենտը: S_n -ով նշանակենք այդ նիստերի մակերեսների գումարը: Միացնելով նշված նիստերի գագաթները գնդի կենտրոնի հետ, կստանանք մի T_n մարմին, որը բաղկացած է միևնույն R բարձրությամբ բուրգերից, որոնց հիմքերի

մակերեսների գումարը հավասար է S_n : Այդ մարմնի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3} S_n R$: n -ի աճմանը զուգընթաց S_n -ը «ձգտում է» S -ի, իսկ T_n մարմնի ծավալը ձգտում է

T մարմնի ծավալին: Այսպիսով, T մարմնի ծավալը, իրոք, հավասար է $\frac{1}{3} SR$:[▽]

Գնդային սեգմենտի ծավալը ստանալու համար մնում է ստացված քվից հանել այն կոնի ծավալը, որի հիմքը համընկնում է սեգմենտի հիմքի շրջանի հետ, իսկ բարձրությունը հավասար է գնդի կենտրոնից մինչև այդ շրջանի հարթության հեռավորությանը:

Նշանակենք սեգմենտի բարձրությունը՝ $AB = h$: Համարենք, որ $h < R$ ($h > R$ դեպքը քննարկվում է նույն ձևով): 11-րդ դասարանի երկրաչափության դասընթացում նշել էինք, որ սեգմենտի մակերևույթի մակերեսը՝ $S = 2 \pi R h$ (այս բանաձևը կապացուցենք կետ 10.3-ում): Զանի մր $AO = R - h$, ապա ΔAOC -ից՝ $AC^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2 R h - h^2$:

Ուստի կոնի ծավալը հավասար է

$$\frac{1}{3} \pi (2 R h - h^2) (R - h):$$

Հետևաբար սեգմենտի ծավալը՝

$$\begin{aligned} V_{\text{սեգ.}} &= V_T - V_{\text{կոն}} = \frac{1}{3} 2 \pi R h R - \frac{1}{3} \pi (2 R h - h^2) \cdot (R - h) = \\ &= \frac{1}{3} \pi (2 R^2 h - (2 R h - h^2)(R - h)) = \frac{1}{3} \pi (3 R h - h^3) = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$

Այսպիսով, R շառավիղով գնդի h բարձրությամբ սեգմենտի ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V_{\text{սեգ.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right):[▽]$$

⁽¹⁾ [Նորից նշենք, որ այս տիպի նախադասությունները խիստ մաթեմատիկական չեն. հեղինակը հենվում է աշակերտների ինտուիտիվ պատկերացումների վրա:]

Պարզ է, որ *գնդային շերտի ծավալը* կարելի է հաշվել՝ դիտարկելով այն որպես երկու գնդային սեգմենտների ծավալների տարբերություն: Ինչպես հետևում է *գնդային թաղանթի* սահմանումից, նրա ծավալը հավասար է՝

$$\frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3),$$

որտեղ r_1 -ը և r_2 -ը նրա ներքին և արտաքին շառավիղներն են:



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1.(կ) Տրված է l երկարությամբ հատված: Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը կազմված է տարածության բոլոր այն կետերից, որոնք հեռացված են այդ հատվածի մի որևէ կետից ոչ ավելի, քան d -ով:

2. Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է 1 կողմով և α սուր անկյունով շեղանկյունը նրա փոքր անկյունագծի շուրջը պտտելիս:

3. Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է 3 և 2 հիմքերով ու 1 բարձրությամբ սեղանի պտտումից նրա մեծ հիմքի շուրջը:

4. Գտեք այն երկու մարմինների ծավալների գումարը, որոնք ստացվում են a և b կողմերով ուղղանկյան պտտումից այդ կողմերի շուրջը:

5. Գտեք գնդի շառավիղը, եթե նրա ծավալը հավասար է մի գլանի ծավալի, որի առանցքային հատույթը a կողմով քառակուսի է:

6. (կ) Գտեք տարածության այն մասի ծավալը, որը կազմված է բոլոր հնարավոր r շառավղով գնդերից, որոնց կենտրոնները գտնվում են a կողմով քառակուսու մեջ կամ նրա եզրի վրա:

7. Գտեք տարածության այն մասի ծավալը, որը բաղկացած է a կողով խորանարդի որևէ ներքին կամ եզրային կետից ոչ ավելի քան d հեռավորության վրա գտնվող կետերից:

8. Ունենք $2p$ պարագծով և S մակերեսով ուռուցիկ բազմանկյուն: Դիտարկենք r շառավղով բոլոր հնարավոր գնդերի բազմությունը, որոնց կենտրոնները բազմանկյան ներքին կամ եզրային կետերն են: Ապացուցեք, որ տարածության այն մասի ծավալը, որը լցվում է այդ գնդերով, կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$V = 2Sr + \pi pr^2 + \frac{4}{3} \pi r^3:$$

Ապացուցեք, որ նշված բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե բազմանկյան փոխարեն վերցնենք ցանկացած հարթ պատկեր, որը սահմանափակված է $2p$ երկարությամբ գծով⁽¹⁾ և ունի S մակերես:

* 9-15 խնդիրները լուծելիս պետք է օգտվել Կավալյերիի սկզբունքից:

(1) Դժի երկարության գաղափարը դպրոցական մաթեմատիկայի ծրագրում չի քննարկվում:]

9. Կանոնավոր եռանկյունը պտտվում է մի ուղղի շուրջ, որը զուգահեռ է այդ եռանկյան հարթությանը և որի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա պարունակում է եռանկյան բարձրությունը: Ապացուցեք, որ ստացված մարմնի ծավալը հավասար է այդ եռանկյունը առանցքային հատույթ ունեցող կոնի ծավալին:

10. Տրված է h բարձրությամբ և a հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն: Այդ եռանկյունը պտտվում է մի ուղղի շուրջ, որը եռանկյան հարթության հետ կազմում է α անկյուն և որի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա պարունակում է եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը: Գտեք ստացված մարմնի ծավալը:

11. h բարձրությամբ գլանի հիմքերը գտնվում են գնդային մակերևույթի (սֆերայի) վրա: Գտնել գնդի այն մասի ծավալը, որը սահմանափակված է սֆերայով և գլանի կողմնային մակերևույթով:

12. (դ) r հիմքի շառավիղ ունեցող երկու գլանների առանցքները հատվում են և փոխուղղահայաց են: Գտեք նրանց ընդհանուր մասի ծավալը: (Գլանների ծնորդները բավականաչափ երկար են):

13. Դիցուք ABCD-ն ուղղանկյուն է, DE հատվածը ուղղահայաց է նրա հարթությանը: Ապացուցեք, որ ABCE տետրաեդրը AB-ի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հավասար է երկու մարմինների ծավալների գումարին՝ AB առանցքով և CD ծնորդով գլանի և CD առանցքով ու CE ծնորդով կոնի:

14. (դ) Գտեք միավոր խորանարդը իր անկյունագծի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

15. (դ) Դիտարկենք մարմին, որը առաջացել է r շառավղով շրջանը այդ շրջանի հարթության մեջ գտնվող և նրա կենտրոնից R ($R > r$) հեռավորության վրա գտնվող ուղղի շուրջը պտտելիս: Այդպիսի մարմինը կոչվում է *տոր*: Ապացուցեք, որ այդ մարմնի ծավալը հավասար է r հիմքի շառավիղ ունեցող և $2\pi R$ բարձրությամբ գլանի ծավալին:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Գլանի մեջ ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, իսկ վերջինի մեջ ներգծած է գլան: Գտնել այդ երկու գլանների ծավալների հարաբերությունը:

2. Կոնի ծավալը հավասար է V-ի: Նրա բարձրությունը բաժանված է երեք հավասար մասերի և բաժանման կետերից հիմքին զուգահեռ հարթություններ են տարված: Գտնել միջին մասի ծավալը:

3. Մի հիմքի վրա կառուցված են կոն և նրան հավասարամեծ գլան: Գլանի բարձրության միջնակետով հիմքին զուգահեռ հարթություն է տարված: Ինչպե՞ս են հարաբերում կոնի և գլանի ստացված հատույթների մակերեսները:

4. Եռանկյան երկու կողմերն են 8 սմ և 15 սմ, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 60° , պտտվում է այդ կողմերից մեծի շուրջը: Որոշել պտտման մարմնի ծավալն ու մակերևույթը:

5. Գլանին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, որի ծավալը հավասար է V-ի: Գտեք գլանի ծավալը:

6. 1. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղները հավասար են 1 դմ և 9 դմ, ծնիչը հավասար է 1 մ: Գտեք ծավալը:

2. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են R և r ($R > r$): Գտեք հատած կոնի ծավալի հարաբերությունը այն կոնի ծավալին, որի մասն է հանդիսանում տրված հատած կոնը:

7. Գնդին ներգծած է H բարձրություն ունեցող կոն: Կոնի ծավալը հավասար է գնդի ծավալի $\frac{1}{4}$ -ին: Գտնել գնդի ծավալը:

8. Կոնին ներգծված է գունդ: Կոնի հիմքին զուգահեռ հարթությունը շոշափում է գունդը և կոնը բաժանում է երկու մասի, որոնք ունեն հավասար ծավալներ: Գտեք ծնիչի և հիմքի հարթության միջև կազմված անկյունը:

9. Հատած կոնին, որի հիմքերի շառավիղներն են R և r, ներգծած է սֆերա: Գտեք սֆերայի մակերեսի հարաբերությունը հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսին:

10. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են R և r, ծնիչը հիմքի նկատմամբ թեքված է 45° -ի անկյան տակ: Գտնել ծավալը:

11. Հատած կոնի բարձրությունը հավասար է 3-ի: Հիմքերից մեկի շառավիղը երկու անգամ մեծ է մյուսից, իսկ ծնիչը հիմքի նկատմամբ թեքված է 45° -ի անկյան տակ: Գտնել ծավալը:

12. Հատած կոնի մեջ հիմքի շառավիղներն ու ծնիչը հարաբերում են ինչպես $4 : 11 : 25$, ծավալը հավասար է 181π մ³-ի: Որոշել հիմքերն շառավիղներն ու ծնիչը:

13. Հատած կոնի ծավալը 52 սմ³ է, հիմքերից մեկի մակերեսը 9 անգամ մեծ է մյուսի մակերեսից: Հատած կոնը լրացրել են մինչև լրիվ կոն դառնալը: Գտնել լրիվ կոնի ծավալը:

14. AB-ն կիսաշրջանի տրամագիծն է, ACDB-ն ներգծած սեղան է, ընդ որում $\angle CAB = 60^\circ$: Այդ սեղանը պտտվում է AB-ին ուղղահայաց շառավիղի շուրջը: Որոշել պտտման մարմնի ծավալը, եթե շառավիղը հավասար է R-ի:

15. Հատած կոնի բարձրությունը հավասար է 18 սմ-ի, իսկ հիմքերի շառավիղները՝ 5 սմ-ի և 11 սմ-ի: Բարձրությունը հիմքերին զուգահեռ երկու հարթություններով բաժանված է երեք հավասար մասերի: Որոշել հատած կոնի ստացված մասերի ծավալները:

16. Հատած կոնի հիմքերից մեկի շառավիղը մյուս հիմքի շառավիղից չորս անգամ մեծ է: Բարձրությունը բաժանված է երեք հավասար մասերի և բաժանման կետերից հիմքերին զուգահեռ հարթություններ են տարված: Ինչպիսի՞ հարաբերությամբ է բաժանվել հատած կոնի ծավալը:

17. Հատած կոնի հիմքերի R և r շառավիղների միջոցով որոշել նրա և լրիվ կոնի ծավալների հարաբերությունը:

18. Հատած կոնի մեջ տրված են հիմքերի շառավիղները՝ R և r , բարձրությունը՝ h : Այդ հատած կոնից կտրված է երկու կոն, որոնց հիմքերը հանդիսանում են հատած կոնի հիմքերը, իսկ մեկի ծնիչները հանդիսանում են մյուսի ծնիչների շարունակությունը: Գտնել մնացած մասի ծավալը:

19. Գնդային թաղանթի արտաքին տրամագիծը հավասար է 18 սմ-ի, պատերի հաստությունը՝ 3 սմ-ի: Գտնել գնդային թաղանթի ծավալը:

20. Թուջե գնդային թաղանթի ներքին տրամագիծը 8 սմ է, իսկ արտաքինը՝ 10 սմ: Գտնել գնդի կշիռը: Թուջի տեսակարար կշիռն է $7,3$ գ/սմ³:

21. Գնդային թաղանթի ծավալը հավասար է 876π սմ³-ի, իսկ պատերի հաստությունը՝ 3 սմ-ի: Գտնել գնդի արտաքին և ներքին մակերևույթների շառավիղները:

22. Տված է մի գունդ: Նրա տրամագիծն ուղղահայաց հարթությամբ բաժանված է երկու մասերի՝ 3 սմ և 9 սմ: Գնդի ծավալն ինչպիսի՞ մասերի է բաժանվում:

23. Գնդի ծավալի n° ր մասն է կազմում սֆերիկ սեգմենտի ծավալը, եթե վերջինիս բարձրությունը հավասար է գնդի տրամագծի $0,1$ մասին:

24. Երկու հավասար գնդեր դասավորված են այնպես, որ մեկի կենտրոնը գտնվում է մյուսի մակերևույթի վրա: Ինչպե՞ս է հարաբերում գնդերի ընդհանուր մասի ծավալն ամբողջ գնդի ծավալին:

25. Գնդի տրամագիծը, որը հավասար է 30 սմ-ի, ծառայում է որպես առանցք մի գլանի, որի հիմքի շառավիղը հավասար է 12 սմ-ի: Որոշել գնդի այն մասի ծավալը, որը պարփակված է գլանի ներսում:

26. Գնդային սեկտորի շառավիղը հավասար է R -ի, առանցքային հատույթի անկյունը՝ 120° -ի: Գտնել սեկտորի ծավալը:

27. Որոշել գնդային սեկտորի ծավալը, եթե նրա հիմքի շրջանագծի շառավիղը հավասար է 30 սմ-ի, իսկ գնդի շառավիղը՝ 75 սմ-ի:

28. Շրջանային սեկտորը, որն ունի 30° -ի անկյուն և R շառավիղ, պտտվում է կողմնային շառավիղներից մեկի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի ծավալը:

29. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանը, որը երկու շառավիղներով բաժանված է երեք հավասար մասերի, պտտվում է տրամագծի շուրջը: Գտնել այն մարմինների ծավալները, որոնք ստացվում են կիսաշրջանի յուրաքանչյուր մասի պտտումից:

30. Գնդային շերտի հիմքերի շառավիղներն են 3 մ և 4 մ, իսկ նրա գնդային մակերևույթի շառավիղը՝ 5 մ: Գտնել շերտի ծավալը (երկու դեպք):

31. Գնդի մեջ, որի շառավիղը 65 սմ է, կենտրոնի մի կողմում տարված են երկու զուգահեռ հարթություններ, որոնք կենտրոնից 16 սմ և 25 սմ հեռավորության վրա են գտնվում: Որոշել գնդի այն մասի ծավալը, որն ընկած է այդ հարթությունների միջև:]

9.4. Սֆերայի (գնդային մակերևույթի) մակերեսը

Ելնելով գնդի ծավալի բանաձևից, կարելի է ստանալ գնդի մակերևույթի մակերեսի (սֆերայի մակերեսի) բանաձևը: Դա կարելի է անել, օրինակ, հետևյալ կերպ: Դիտարկենք R շառավղով սֆերային արտագծված կամայական բազմանիստ: Այդ դեպքում (տե՛ս թեորեմ 8.6-ի (5) բանաձևը) բազմանիստի ծավալը արտահայտվում է

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot R \cdot S_p$$

բանաձևով, որտեղ S_p բազմանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսն է: Մեծացնելով բազմանիստի նիստերի քանակն այնպես, որ յուրաքանչյուր նիստի մակերեսը անսահման փոքրանա (ձգտի 0-ի),⁽¹⁾ կստանանք, որ (5) բանաձևը մնում է ճիշտ նաև գնդի համար և գնդի ծավալը արտահայտվում է

$$V_q = \frac{1}{3} \cdot R \cdot S_u, \quad \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} \cdot R S_u$$

բանաձևով: Այսպիսով, *սֆերայի մակերեսը* արտահայտվում է

$$S_u = 4\pi R^2 \quad (13)$$

բանաձևով:



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Գլանի հատույթը քառակուսի է: Կոնի հիմքը համընկնում է գլանի հիմքերից մեկի հետ, իսկ գագաթը մյուս հիմքի կենտրոնն է: Գտեք գլանի և կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսների հարաբերությունը:

2. R հիմքի շառավղով և h բարձրությամբ գլանից հեռացրել են երկու կոներ: Յուրաքանչյուրի գագաթը համընկնում է գլանի կենտրոնի հետ, իսկ հիմքերը՝ գլանի հիմքերի հետ: Գտեք ստացված մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

3. Դիտարկենք երկու մարմիններ, որոնք ստացվում են 1 կողմով և α սուր անկյունով շեղանկյունը նրա փոքր և մեծ անկյունագծերի շուրջը պտտելիս: Գտեք դրանցից յուրաքանչյուրի լրիվ մակերևույթի մակերեսը: Ո՞ր մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսն է մեծ:

4. (կ) Ունենք միևնույն ծավալով գունդ և խորանարդ: Որի՞նք լրիվ մակերևույթի մակերեսն է մեծ:

5. (կ) Դիցուք S -ը կոնի հիմքի մակերեսն է, $S_{կողմ.կ}$ -ը նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը, α -ն՝ ծնորդի և կոնի հիմքի հարթության կազմած անկյունը: Ապացուցեք, որ

$$S = S_{կողմ.կ} \cdot \cos \alpha :$$

⁽¹⁾ [այս նախադասությունը խիստ մաթեմատիկական բովանդակություն չունի:]

6. ABC ուղղանկյուն եռանկյան AD ներքնաձիգը հավասար է 4, $\angle BAC = 30^\circ$, K-ն BC-ի միջնակետն է: Գտեք BAK եռանկյունը AC-ի շուրջը պտտելիս ստացված մարմնի ծավալը և լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

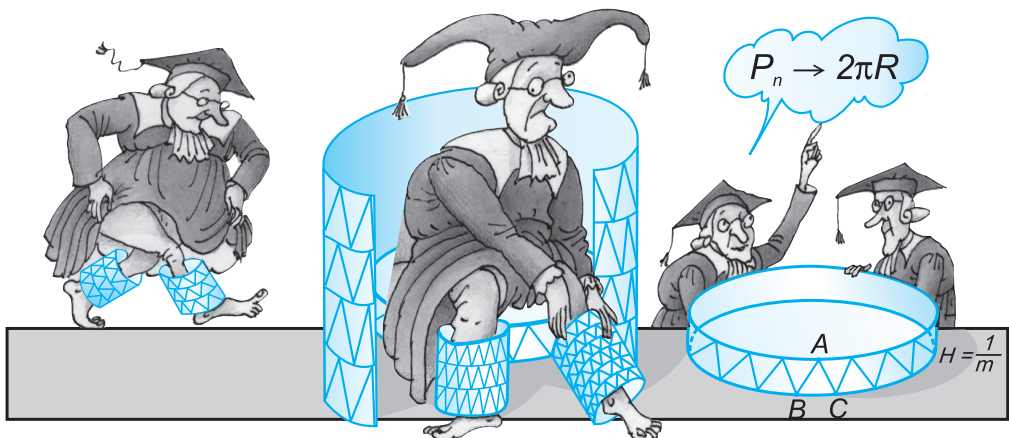
7. (դ) a կողմով կանոնավոր եռանկյան կենտրոնով տարված է նրա կողմերից մեկին զուգահեռ ուղիղ: Գտեք այդ ուղղի շուրջը եռանկյան պտտումից առաջացած մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

8. (օ) R շառավղով գնդի կենտրոնը գտնվում է α մեծությամբ երկնիստ անկյան կողի վրա: Գտեք այդ երկնիստ անկյան մեջ գտնվող գնդի մասի ծավալը և սֆերայի մասի մակերեսը:

9.4* Շվարցի «ծալքակոշիկը» կամ ի՞նչ է մակերևույթի մակերեսը

Մենք արդեն գիտենք բանաձևեր, որոնցով կարելի է հաշվել մեզ հայտնի պտտական մարմինների մակերևույթների մակերեսները: Ընդ որում այն հարցը, թե ինչ բան է բազմանիստ չհանդիսացող մարմնի մակերևույթի մակերեսը, չի քննարկվել:

Կորի երկարությունը կարելի է ստանալ հատկյալ կերպ: Այդ կորի վրա նշենք մի քանի կետեր և դրանք հաջորդաբար միացնենք հատվածներով: Կստանանք բեկյալ, որը ինչ-որ իմաստով ներգծված է կորին: Այնուհետև սկսենք մեծացնել բեկյալի օղակների թիվն այնպես, որ ամենամեծ օղակի երկարությունը ձգտի զրոյի: Այդ դեպքում բեկյալի երկարությունը նրա օղակների թվի աճման հետ մեկտեղ կմոտենա կորի երկարությանը: Մոտավորապես այդպես են մաթեմատիկոսները սահմանում կորի երկարությունը:



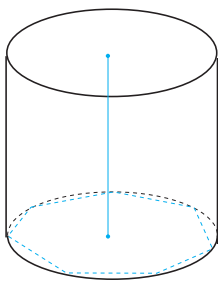
Իսկ կարելի՞ է արդյոք նման ձևով, «ներգծելով» դիտարկվող մակերևույթին բազմանիստ մակերևույթ և մեծացնելով նրա նիստերի քանակը, պնդել, որ բազմանիստ մակերևույթի մակերեսը անպայման կմոտենա դիտարկվող մակերևույթի մակերեսին: Պարզվում է, որ այս դեպքում ամեն ինչ այդքան պարզ չէ: Նույնիսկ դիտարկելով պարզագույն պտտական մակերևույթներ, նման գործողությունների հետևանքով կարելի է ստանալ տարօրինակ և ակնհայտորեն սխալ արդյունքներ:

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կոնստրուկցիան, որն անվանում են Շվարցի ծալքակոշիկ (կամ Շվարցի կնճռածալք): Այս օրինակը կառուցել է XIX-XX դ. գերմանացի հայտնի մաթեմատիկոս Գ.Ա.Շվարցը:

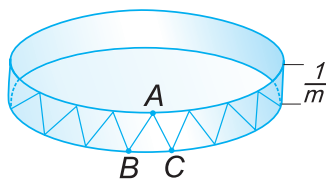
Դիտարկենք R հիմքի շառավղով և 1 բարձրությամբ գլան (նկ. 23 ա): Ստորին հիմքին ներգծենք կանոնավոր n -անկյուն: Այնուհետև գլանի բարձրությունը բաժանենք m հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք հիմքերին զուգահեռ հատույթներ: Համարակալենք այդ հատույթները սկսած ստորին հիմքից: Յուրաքանչյուր հատույթում նորից ներգծենք կանոնավոր n -անկյուններ, միայն թե կենտ համարներով հատույթներում այդ n -անկյունների կողմերը լինեն համապատասխանաբար զուգահեռ ստորին հիմքի բազմանկյան կողմերին, իսկ զույգ համարներով հատույթներում այդ կողմերի նկատմամբ

պտտված լինեն $\frac{180^\circ}{n}$ անկյունով: Այնուհետև յուրաքանչյուր n -անկյան գագաթները միացնենք հարևան բազմանկյունների մոտակա գագաթների հետ: Արդյունքում կստանանք եռանկյուններից բաղկացած (եթե հաշվի չառնենք վերին և ստորին n -անկյունները) բազմանիստ մակերևույթ, որը ներգծված է գլանին:

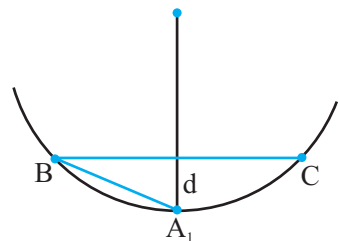
23 (բ) նկարում պատկերված է այդ մակերևույթի շերտերից մեկը (՝ նկատեք, որ այդ բազմանիստի կողերը՝ օրինակ AB , AC -ն չեն գտնվում գլանի մակերևույթի վրա): Այն բաղկացած է $2n$ հատ հավասարասրուն եռանկյուններից: Նրանց հիմքեր են հանդիսանում երկու կանոնավոր n -անկյունների կողմերը, որոնք ներգծված են $\frac{1}{m}$ բարձրությամբ գլանի հիմքերին: Ֆիքսենք n թիվը: Նշված եռանկյուններից յուրաքանչյուրի հիմքին տարված բարձրությունը մեծ է մի



ա)



բ)
Նկ. 23



գ)

ինչ-որ թվից (կախված n -ից): Այդ թիվը կարելի է որոշել հետևյալ կերպ: Վերցնենք ցանկացած ABC եռանկյուն. դիցուք BC -ն նրա հիմքն է՝ (նկ. 23 բ) R շառավղով շրջանագծին ներգծված կանոնավոր n -անկյան կողմը: A գագաթը պրոյեկտենք BC կողմը պարունակող հարթության վրա (որը զուգահեռ է գլանի հիմքերին): Կատանանք A_1 կետը, որը BC աղեղի միջնակետն է (նկ. 23 գ):

Հասկանալի է, որ ABC եռանկյան BC կողմին տարված բարձրությունը փոքր չէ A_1 -ից մինչև BC եղած հեռավորությունից: Նշանակենք այդ հեռավորությունը d -ով (ճիշտ կլինեն այն նշանակել d_n -ով, ընդգծելով նրա կախվածությունը n -ից): Վերցնենք ցանկացած $k > 1$ թիվ և m -ը ընտրենք այնպես, որ տեղի ունենա $\frac{k}{m} < d$ անհավասարությունը: Այսպիսով, յուրաքանչյուր եռանկյան բարձրությունը մեծ է $\frac{k}{m}$ -ից:

Եթե P_n -ը R շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծն է, ապա մի շերտին պատկանող եռանկյունների մակերեսների գումարը մեծ կլինի $P_n \cdot \frac{k}{m}$ -ից: Հետևաբար գլանի կողմնային մակերևույթին ներգծված բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը մեծ է $mP_n \cdot \frac{k}{m} = k \cdot P_n$ թվից: Սակայն n -ի աճման հետ միասին P_n -ը մոտենում է շրջանագծի երկարությանը, այսինքն $2\pi R$ -ին: Ուստի գլանի կողմնային մակերևույթին ներգծված բազմանիստ մակերևույթի մակերեսը n -ի աճման հետ սկսած մի ինչ-որ պահից ($n > n_0$) մեծ կդառնա $k \cdot (2\pi R)$ թվից, որտեղ k -ն 1-ից մեծ ցանկացած թիվ է: Իսկ մենք գիտենք, որ R հիմքի շառավղով և 1 բարձրությամբ գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է $2\pi R$: Ստացված հակասությունը ապացուցում է, որ գլանի, և ընդհանրապես ցանկացած կլոր մարմինների, մակերևույթի մակերեսը նման եղանակով չի կարելի սահմանել: Ընդ որում նույնիսկ կարևոր էլ չէ, թե նախապես մենք գիտեինք, թե ինչի է հավասար գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

Չէ որ մեր «դատողությունները» բերեցին նրան, որ գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը կարող է մեծ լինել կամայական թվից: Եվ որպեսզի հասկանալ դրա անհեթեթությունը, անհրաժեշտություն չկա իմանալ, թե ինչի է հավասար գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

Բերված օրինակը ցույց է տալիս, որ մակերևույթի մակերեսը բավականին բարդ գաղափար է: Սահմանել, թե ինչ է մակերևույթի մակերեսը այնքան էլ հեշտ չէ, որովհետև, ինչպես տեսանք, առաջին հայացքից բավականին «խելքին մոտ» սահմանումները կարող են բերել պարադոքսների: Փորձենք հակիրճ բացատրել, թե ինչու բերված օրինակում բազմանիստ մարմնի մակերևույթի մակերեսը նրա նիստերի թվի աճման արդյունքում չի մոտենում գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսին: Բանը նրանում է, որ բազմանիստ մակերևույթը կազմող եռանկյուններից յուրաքանչյուրի հարթությունը չի մոտենում գլանի կողմնային մակերևույթը շոշափող հարթությանը: Եթե եռանկ-

յան գազաթներից մեկով տանենք գլանի մակերևույթին շոշափող հարթություն, ապա այդ հարթության և եռանկյան հարթության կազմած անկյունը մեծ կմնա մի որևէ մեծությունից:

Այս դասագրքում մակերևույթի մակերեսի սահմանումը ընդհանուր դեպքում չի քննարկվելու. մենք կսահմանափակվենք կոնկրետ մարմինների մակերևույթների դիտարկումով՝ գլանի, կոնի, սֆերայի, ինչպես նաև նրա մասերի կողմնային մակերևույթներով:

9.5 Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը

Հիշենք, որ գնդային գոտի կոչվում է սֆերայի այն մասը, որը գտնվում է սֆերան հատող երկու զուգահեռ հարթությունների միջև: Այդ հարթությունների հեռավորությունը կոչվում է գնդային գոտու *բարձրություն*:

Եթե այդ հարթություններից մեկը շոշափում է սֆերան, ապա ստանում ենք *գնդային սեգմենտ*:

Այս պարագրաֆի նպատակն է արտածել գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսի բանաձև: Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Թեորեմ 9.1 (Կոնական մակերևույթի մասի մակերեսի հաշվման բանաձև):

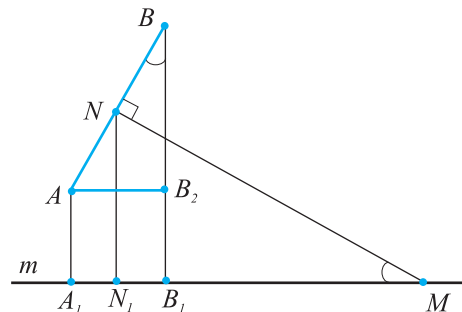
Դիտարկենք միևնույն հարթության մեջ գտնվող AB հատված և m ուղիղ, որը չի հատում այդ հատվածը և ուղղահայաց չէ նրան: Դիցուք h -ը m ուղղի վրա AB հատվածի պրոյեկցիայի երկարությունն է, L -ը՝ AB հատվածի միջնորդահայացի այն հատվածի երկարությունը, որը գտնվում է AB -ի և m -ի միջև: Այդ դեպքում AB -ն m -ի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$S = 2\pi \cdot L \cdot h : \quad (16)$$

Ապացույց: Ստացված մակերևույթը իրենից ներկայացնում է հատած կոնի կողմնային մակերևույթ:

Դիցուք A_1 և B_1 -ը A և B և կետերի պրոյեկցիաներն են m ուղղի վրա, N -ը AB -ի միջնակետն է, MN -ը AB -ի միջնորդահայացի հատվածն է, (M -ը գտնվում է m -ի վրա), N_1 -ը N կետի պրոյեկցիան է m -ի վրա, B_2 -ը A -ի պրոյեկցիան է BB_1 -ի վրա (նկ. 24):

Ըստ պայմանի, $A_1B_1 = AB_2 = h$, $MN = L$, NN_1 -ը AA_1B_1B սեղանի միջին գիծն է, $AA_1 + BB_1 = 2NN_1$: Ըստ հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի բանաձևի՝ (տե՛ս 11-րդ դասարանի դասագրքի կետ 5.2)



Նկ. 24

$$S = \pi(AA_1 + BB_1) \cdot AB = 2\pi \cdot NN_1 \cdot AB:$$

BA_2 և MN_1N եռանկյունների մնանությունից $\angle B = \angle M$ կստանանք

$$\frac{NN_1}{AB_2} = \frac{NM}{AB}, \text{ որտեղից } NN_1 \cdot AB = AB_2 \cdot NM \text{ Այսպիսով, } S = 2\pi \cdot AB_2 \cdot NM = 2\pi Lh,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: ▽

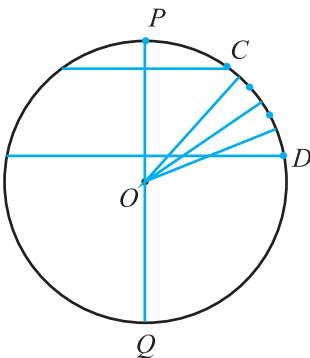
ԹԵՈՐԵՄ 9.2 (Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսի բանաձևը):

Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը կարելի է գտնել

$$S = 2\pi R \cdot h \quad (17)$$

բանաձևով, որտեղ R -ը գնդի շառավիղն է, h -ը՝ գնդային գոտու բարձրությունը:

Ապացույց: Տրված սֆերայում վերցնենք գնդային գոտին սահմանափակող երկու հարթություններին ուղղահայաց PQ տրամագիծը և դիտարկենք սֆերայի հատույթը PQ-ով անցնող հարթությամբ: Գնդային գոտու հատույթները կլինեն PQ-ի նկատմամբ համաչափ երկու աղեղներ, որոնցից յուրաքանչյուրի պրոյեկցիան PQ-ի վրա հավասար է h -ի: Գնդային գոտին առաջանում է, այդ աղեղներից ցանկացածը PQ-ի շուրջը պտտելիս: Դիցուք դա CD աղեղն է (նկ. 25):



Նկ. 25

CD աղեղը բաժանենք n հավասար մասերի և հաջորդաբար միացնենք բաժանման կետերը: Կստանանք հավասար կողմերով (օղակներով) բեկյալ, որը ներգծված է CD աղեղին: O -ով նշանակենք PQ-ի միջնակետը (գնդի կենտրոնը), L_n -ով՝ O -ի հեռավորությունը բեկյալի կողմերից (օղակներից):

(Քանի որ բեկյալի կողմերը իրար հավասար են, ապա նրանք հավասարաի են O կետից: Բացի այդ բոլոր կողմերի միջնուղղահայացներն անցնում են O կետով): Բեկյալը PQ-ի շուրջը պտտելիս կստանանք մակերևույթ, որը կազմված է կոնական մակերևույթների մասերից: Դրանցից յուրաքանչյուրը համապատասխանում է բեկյալի մի կողմին: Յուրաքանչյուր մասի համար կիրառելով (16) բանաձևը և գումարելով ստացված արժեքները, կստանանք, որ բեկյալի պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսի համար ճիշտ է

$$S_n = 2\pi L_n \cdot h$$

բանաձևը: n -ը մեծացնելիս L_n աճում է և ձգտում R -ի: Որպես գնդային գոտու մակերևույթի մակերես ընդունենք այն մեծությունը, որին ձգտում է S_n -ը: Արդյունքում կստանանք (17) բանաձևը: ▽

Դիտողություն. Ինչո՞ւ մենք կարող ենք համոզված լինել, որ ապացուցված (17) բանաձևը ճիշտ է և տալիս է գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսի ճիշտ արժեքը: Ինչո՞վ է նրա դուրս բերման համար կառուցված մակերևույթը տարբերվում նախորդ պարագրաֆում կառուցված բազմանիստի մակերևույթից, որը բերեց սխալ արդյունքի: Բանը նրանում է, որ շրջանագծի աղեղին ներգծ-

ված բեկյալի կողմերի թվի մեծացմանը զուգընթաց, այդ բեկյալի պտտումից առաջացած մակերևույթի շոշափող հարթությունները մոտենում են գնդային գոտու մակերևույթի շոշափող հարթություններին:

(17) բանաձևով կարելի է հաշվել նաև *գնդային սեզմենտի* (հարթություններից մեկը շոշափում է սֆերան) մակերևույթի մակերեսը: Իսկ եթե (17) բանաձևի մեջ վերցնենք $h = 2R$ (երկու հարթություններն էլ շոշափում են սֆերան), ապա կստանանք արդեն մեզ հայտնի *սֆերայի մակերեսի բանաձևը*՝ $S = 4\pi R^2$:



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Սֆերայի տրամագծին ուղղահայաց մի քանի հարթություններ բաժանում են այդ տրամագիծը հավասար մասերի: Ապացուցեք, որ այդ հարթությունները սֆերան բաժանում են հավասար մակերես ունեցող մասերի:
2. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը հավասար է նրա հիմքի կողմին և հավասար է 2: Բուրգի գագաթը կենտրոն ունեցող սֆերան շոշափում է բուրգի հիմքի կողմերը: Գտեք բուրգի հիմքի տարբեր կողմերում գտնվող սֆերայի մասերի մակերեսները:
3. Դիտարկենք միավոր խորանարդի բոլոր կողերը շոշափող սֆերան: Խորանարդի մակերևույթը սֆերան բաժանում է մի քանի մասերի: Քանի՞ մաս է ստացվում: Գտեք այդ մասերի մակերեսները:
4. R շառավղով գունդը հատված է նրա կենտրոնից d հեռավորությամբ անցնող հարթությամբ: Գտնել ստացված մասերի ծավալները:
5. R շառավղով առաջին սֆերայի կենտրոնը գտնվում է երկրորդ սֆերայի մակերևույթի վրա: Գտնել երկրորդ սֆերայի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է առաջին սֆերայի մեջ:



Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Գտեք գլանի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը հավասար է r , իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է S -ի:
2. Գտեք կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը r է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ S :
3. Գտեք գլանի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը r է, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը հավասար է S :
4. Գտեք կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը r է, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը S :

5. Ապացուցեք, որ գլանի կողմնային մակերևույթը հատող հարթությունը բժանում է նրա առանցքը, կողմնային մակերևույթը և ծավալը նույն հարաբերությամբ:

6. Երկու կոներ ունեն նույն հիմքը, որի շառավիղը հավասար է r -ի, ընդ որում նրանցից մեկի գագաթը գտնվում է մյուս կոնի մեջ: Բարձրությունների տարբերությունը հավասար է α : Գտեք նրանց կողմնային մակերևույթների միջև գտնվող մարմնի ծավալը:

7. Գտեք միավոր քառակուսին իր անկյունագծի շուրջը պտտելուց ստացված մարմնի ծավալը և մակերևույթի մակերեսը:

8. Եռանկյան բոլոր կողմերը իրարից տարբեր են: Դիտարկենք երեք մարմիններ, որոնք համապատասխանաբար ստացվում են եռանկյունը իր փոքր, միջին և մեծ կողմերի շուրջ պտտելուց: Ո՞ր մարմնի ծավալն է ամենամեծը:

9. Գլանի հիմքի շառավիղը 1 է, իսկ բարձրությունը՝ 3: Նրա հիմքի հարթության մեջ գտնվող / ուղիղը գտնվում է հիմքի կենտրոնից 2 հեռավորության վրա: / ուղղով անցնող հարթությունը հիմքի հարթության հետ կազմում է $\alpha \leq 45^\circ$ անկյուն և հատում է գլանի առանցքը: Գտեք գլանը այդ հարթությամբ հատելուց ստացված նրա յուրաքանչյուր մասի ծավալը:

10. Գտնել կոնի ծավալը, եթե նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է S , իսկ նրան արտագծված սֆերայի շառավիղը՝ R :

11. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը պատկանում է կոնին: Պրիզմայի բարձրությունը մեծ է կոնի բարձրությունից: Պրիզմայի հիմքի մակերեսը հավասար է S , իսկ կոնի ծնորդները հիմքի հարթության հետ կազմում են α անկյուն: Գտնել կոնի կողմնային մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է պրիզմայի մեջ:

12. Գնդի շուրջն արտագծած է գլան: Գտնել նրանց մակերևույթների և ծավալների հարաբերությունը:

13. Տվյալ գնդային սեգմենտի ծավալը m անգամ մեծ է նրան ներգծած գնդի ծավալից: Որոշել գնդային սեգմենտի բարձրությունը, եթե նրա գնդային մակերևույթի շառավիղը հավասար է R -ի:

14. Q մակերեսով շեղանկյունը պտտվում է իր կողմի շուրջը: Որոշել առաջացած մարմնի ծավալը:

15. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանագծի վրա, նրա AB տրամագծի ծայրից, վերցված է BMC աղեղը, որը պարունակում է 60° , և C կետը միացված է A կետի հետ: Որոշել այն մարմնի ծավալն ու մակերևույթը, որն ստացվում է, երբ AB տրամագծով, AC լարով և BMC աղեղով սահմանագծված պատկերը պտտվում է AB -ի շուրջը:

16. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանագծի AB տրամագծի ծայրից վերցված է BMC աղեղը, որ պարունակում է 45° , և C կետից տարված է շոշափող, որը հատում է AB տրամագծի շարունակությունը D կետում: BD ու CD ուղիղներով և BMC աղեղով սահմանափակված պատկերը պտտվում է BD -ի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի ծավալն ու մակերևույթը:

17. Օ-ն R շառավիղ ունեցող AMC աղեղի կենտրոնն է. B-ն OA շառավիղի շարունակության վրա վերցված մի կետ է. B-ն AMC աղեղի շոշափողն է: CD-ն ուղղահայաց է OA շառավիղին: Պատկերը պատվում է OB առանցքի շուրջը: Որոշել OD հեռավորությունը, եթե AMC աղեղի պտտումից առաջացած մակերևույթը կիսում է այն ծավալը, որ ստացվում է OCB եռանկյունն OB առանցքի շուրջը պտտելուց:

18. AOB-ն քառորդ շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է O կետում և շառավիղը հավասար է R-ի, AMC-ն 60° -ի աղեղ է, AD-ն՝ շոշափող, ընդ որում D-ն նրա հատման կետն է OC շառավիղի շարունակության հետ: AD և CD հատվածներով և AMC աղեղով սահմանափակված պատկերը պտտվում է OB շառավիղի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի ծավալն ու մակերևույթը:

19. R շառավիղ ունեցող գնդի մեջ ներգծած է մի խորանարդ, և նրա նիստերի վրա կառուցված են կանոնավոր բուրգեր այնպես, որ գագաթները գտնվում են գնդի մակերևույթի վրա: Որոշել ստացված բազմանիստի ծավալը և նրա ու գնդի ծավալների հարաբերությունը:

20. Գնդի շուրջն արտագծած է կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգ, որի հիմքերի կողմերը հարաբերում են ինչպես $m : n$: Գտնել նրա ու գնդի ծավալների հարաբերությունը:

21. Ուղիղ գուգահեռանիստի մեջ նրա անկյունագծերի հատման կետը հիմքի հարթությունից 3 սմ հեռավորության վրա է գտնվում, իսկ կողմնային նիստերից՝ 2 սմ և 4 սմ, հիմքի պարագիծը 30 սմ է: Որոշել գուգահեռանիստի լրիվ մակերևույթն ու ծավալը:

22. R շառավիղ ունեցող գնդին արտագծած է հատած կոն, որի ծավալը m անգամ մեծ է գնդի ծավալից: Որոշել նրա հիմքերի շառավիղները:

23. Ինչպե՞ս է հարաբերում կանոնավոր տետրաեդրին արտագծած կոնի ծավալը նույն այդ տետրաեդրին ներգծած գնդի ծավալին:

24. Խորանարդը, որի կողը հավասար է a -ի, իր անկյուններից հատված է հարթություններով, որոնք անցնում են նույն կետից ելնող երեք կողերից յուրաքանչյուրի միջնակետով: Որոշել ստացված բազմանիստի մակերևույթն ու ծավալը:

25. Շրջանագծի կենտրոնից տարված ACD հատողը 40 սմ է, շոշափողը՝

$AB = 20$ սմ: Որոշել այն մարմնի ծավալն ու մակերևույթը, որ ստացվում է, երբ պտտվում է AB-ի շուրջը AB ու AD ուղիղները և BMD աղեղով սահմանափակված պատկերը:

26. Կիսագնդի հիմքում ներգծված է a կողմով քառակուսի: Քառակուսու կողմերով տարված են հարթություններ, որոնք ուղղահայաց են կիսագնդի հիմքի հարթությանը: Այդ հարթությունները կիսագնդից հատում են չորս գնդային կիսասեգմենտներ: Մնացած մասն ունի հաճախ պատահող կամարի ձև: Հաշվել կամարի գրաված ծավալը:

27. R շառավիղ ունեցող կիսագնդի հիմքում ներգծած է մի ուղղանկյուն, որի կողմերն են a և b : Ուղղանկյան կողմերով տարված են հիմքին ուղղահայաց չորս հարթություններ, որոնք կիսագնդերից հատում են չորս մասեր (կիսասեգմենտներ): Գտնել մնացած մասի ծավալը:

28. Եռանկյունը, որի մակերեսը հավասար է 36 սմ^2 -ի, պտտվում է իր կողմերից մեկի շուրջը: Ստացված մարմնի ծավալը հավասար է $192 \pi \text{ սմ}^3$ -ի, իսկ մակերևույթը՝ $216 \pi \text{ սմ}^2$ -ի: Որոշել եռանկյան կողմերը և ցույց տալ, թե նրանցից ո՞րն է հանդիսացել առանցքը:

29. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի մեջ տրված են հիմքի կողմերը՝ a ու b և բարձրությունը՝ h : Որոշել նրա այն մասի ծավալը, որ սահմանափակված է կողմնային միստի և նրան զուգահեռ այն հարթության միջև, որ տարված է վերին հիմքի կողմով:

30. Եռանկյունը, որի կողմերն իրար հարաբերում են այնպես, ինչպես $13 : 14 : 15$, պտտվում է միջին կողմի շուրջը: Ստացվող կրկնակի կոնի մեջ ներգծած է մի գունդ: Ինչպե՞ս է հարաբերում գնդի ծավալը կրկնակի կոնի ծավալին:

31. Ուղիղ պրիզմայի համար որպես հիմք ծառայում է ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, որի AB ներքնաձիգը հավասար է c -ի և սուր անկյունը՝ 150° -ի: Եթե C_1CAA_1 և C_1CBB_1 կողմնային միստերը փռենք մի հարթության վրա և տանենք C_1A և C_1B գծերը, ապա նրանք կկազմեն ուղիղ անկյուն: Որոշել այդ պրիզմայի ծավալը և կողմնային մակերևույթը:

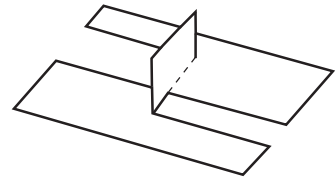
32. Խորանարդի մեջ, որի կողը հավասար է a -ի, կառուցված է մի գունդ այնպես, որ նրա մակերևույթը շոշափում է խորանարդի բոլոր կողերը: Որոշել գնդի այն մասի ծավալը, որ գտնվում է խորանարդի մեջ:]

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

1. Միայն մկրատի օգնությամբ թղթից պատրաստեք նկ. 26-ում բերված պատկերը:

2. Պատկերացրեք, որ դուք պատահաբար հայտնվել եք շինարարությունում:

Առաջարկեք աղյուսի անկյունագծի չափման պրակտիկորեն հարմար եղանակ: (Ենթադրվում է, որ դուք ունեք քանոն կամ այլ գործիք, որի օգնությամբ կարելի է չափել հատվածի երկարությունը: Պետք է կատարել միայն մեկ չափում, առանց որևէ հաշվարկների):



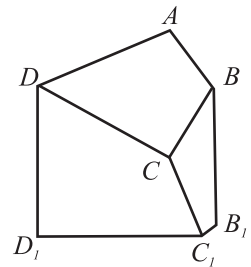
Նկ. 26

3. Կառուցեք առանց ինքնահատումների տարածական բեկյալ, որն ունի 6 կողմ և անցնում է խորանարդի բոլոր գագաթներով:

4. Դասավորեք իրար հետ ընդհանուր ներքին կետեր չունեցող ութ տետրաէդրներ այնպես, որ նրանցից ցանկացած երկուսը միմյանց շոշափեն ոչ զրոյական մակերես ունեցող մակերևույթի մասով:

5. Յույց տվեք, թե ինչպես վեց միմյանց հետ չհատվող գնդերով կարելի է փակել լույսի կետային աղբյուրը: (Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի սֆերա, հնարավոր է, բավականաչափ մեծ շառավղով, որի կենտրոնը համընկնում է լույսի աղբյուրի հետ և որը ներսից բոլորովին չի լուսավորվում):

6. (դ) Հարթության վրա տրված է մի որևէ $ABCD A_1 B_1 C_1 D$ վեցանիստի յոթ գագաթների պատկերը, ընդ որում այդ վեցանիստի բոլոր միստերը քառանկյուններ են (նկ. 27), միստերը նշանակված են այնպես, ինչպես վեցանիստում: Կառուցեք ութերորդ գագաթի պատկերը:



Նկ. 27

7. Ինչպիսի՞ կանոնավոր բազմանկյուններ կարող են հանդիսանալ խորանարդի հատույթներ:

8. Գտեք բուրգին արտագծված գնդի շառավիղը, եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են 5-ի, իսկ բարձրությունը հավասար է 4-ի:

9. Գտեք a կողով կանոնավոր տետրաէդրին ներգծված և արտագծված սֆերաները շոշափող գնդի շառավիղը:

10. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում կանոնավոր տետրաէդրի ծավալը նրա միստին զուգահեռ և նրան ներգծված գունդը շոշափող հարթությունը:

11. Ինչ հարաբերությամբ է բաժանում կամայական տետրաէդրի ծավալը նրա երեք միստերի միջնագծերի հատման կետերով անցնող հարթությունը:

12. (օ) Ապացուցեք, որ եթե եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունները իրար հավասար են, ապա իրար հավասար են նաև նրանց հանդիպակաց երկնիստ անկյունները:

13. (դ) Ապացուցեք, որ եթե եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունների գումարը 180° է, ապա նրանց հանդիպակաց երկնիստ անկյունների գումարը նույնպես հավասար է 180° :

14. Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը 60° անկյունով սեկտոր է: Գտեք կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը:

15. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայի հիմքերի միջնագծերի հատման կետերը միացնող հատվածը ABC_1 հարթությամբ:

16. SABCD բուրգի հիմքը ABCD զուգահեռագիծն է, M-ը AB կողմի միջնակետն է, N-ը՝ SC կողմի միջնակետը: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում MN հատվածը BSD հարթությամբ:

17. Կանոնավոր վեցանկյան պրիզմայի հիմքի կողմը և բարձրությունը հավասար են a -ի: Գտեք՝ ա) պրիզմայի ծավալը, բ) պրիզմային արտագծված գնդի շառավիղը, գ) նրա հանդիպակաց գագաթները միացնող ուղղի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

18. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a -ի, իսկ հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները՝ 60° : Գտեք՝

ա) բուրգի ծավալը, բ) կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը, գ) հանդիպակաց կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը, դ) երկու հարևան կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը, ե) արտագծված սֆերայի շառավիղը, գ) ներգծված սֆերայի շառավիղը, է) հիմքի անկյունագծի և բուրգի գագաթը հիմքի կողմի միջնակետին միացնող ուղղի կազմած անկյունը և հեռավորությունը:

19. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի հիմքի կողմը և բարձրությունը հավասար են a -ի: Գտեք՝ ա) բուրգի ծավալը, բ) կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը, գ) հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը, դ) հարևան կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը, ե) արտագծված գնդի շառավիղը, գ) ներգծված գնդի շառավիղը:

20. Բուրգի հիմքը 5 և 12 էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են 60° : Գտեք այդ բուրգի ծավալը և նրան ներգծված ու արտագծված գնդերի շառավիղները:

21. Եռանկյուն բուրգի հիմքը կանոնավոր եռանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը հավասար է 1: Հիմքին առընթեր երկու երկնիստ անկյունները հավասար են 60° , իսկ մյուսը՝ 120° : Գտեք բուրգի ծավալը, ինչպես նաև նրան ներգծված և արտագծված գնդերի շառավիղները:

22. (օ) Ապացուցեք, որ տարածության ցանկացած A, B, C, D կետերի համար AB և CD հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը չի գերազանցում BC-ի և AD-ի կիսագումարին:

23. Քառանկյուն բուրգի հիմքը 2 կողմով շեղանկյուն է: Հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են 60° : Բուրգի բարձրությունը հավասար է h -ի: Գտեք բուրգի ծավալը (կախված h -ից):

24. Գտեք միավոր խորանարդի երեք նիստերը և խորանարդին ներգծված գունդը շոշափող գնդի շառավիղը:

25. Ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթը հատում են նրա կողմնային կողի հետ α և β անկյուններ կազմող երկու հարթություններ (այդ հարթությունները չեն հատում պրիզմայի հիմքերը:) Գտեք պրիզմայի ստացված հատույթների մակերեսների հարաբերությունը:

26. Գտեք a կողով կանոնավոր տետրաեդրի երեք նիստերը և նրան ներգծված գունդը շոշափող գնդի շառավիղը:

27. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում խորանարդի ծավալը նրա անկյունագծին ուղղահայաց և խորանարդին ներգծված գունդը շոշափող հարթությունը:

28. (դ) Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում խորանարդի ծավալը նրա անկյունագծին ուղղահայաց և այդ անկյունագիծը x հարաբերությամբ բաժանող հարթությունը:

29. Գլանի հիմքերը միավոր խորանարդի հանդիպակաց նիստերին ներգծված շրջանագծեր են: Հարթությունը անցնում է գլանի առանցքին ոչ զուգահեռ խորանարդի երկու հանդիպակաց կողերով: Գտեք գլանի այդ հարթությամբ հատույթի մակերեսը:

30. Գտեք այն գլանի ծավալը, որի առանցքը 1 կող ունեցող կանոնավոր տետրաեդրի կողն է, իսկ գլանի կողմնային մակերևույթը շոշափում է տետրաեդրին ներգծված գունդը:

31. Գտեք այն կոնի ծավալը, որի բարձրությունը միավոր խորանարդի կողն է, իսկ կողմնային մակերևույթը շոշափում է խորանարդին ներգծված գունդը:

32. Կանոնավոր տետրաեդրի կողը հավասար է a -ի: Մֆերան շոշափում է նրա բոլոր կողերը: Տետրաեդրի մակերևույթով սֆերայի մակերևույթը բաժանված է մի քանի մասի: Գտեք այդ մասերից յուրաքանչյուրի մակերեսը:

33. (դ) a կողով կանոնավոր տետրաեդրի գագաթներից մեկը ընկած է գլանի բարձրության վրա, իսկ մնացած գագաթները՝ գլանի կողմնային մակերևույթի վրա: Գտեք գլանի հիմքի շառավիղը:

34. Գլանի բարձրությունը a կողով խորանարդի նիստի անկյունագիծն է, իսկ գլանի կողմնային մակերևույթը շոշափում է այդ անկյունագծի հետ խաչվող խորանարդի հարևան նիստի անկյունագիծը: Գտեք գլանի ծավալը:

35. Տրված է a կողով $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդը, իսկ M -ը CB_1 ուղղի կետ է: Գտեք $A_1 B M$ եռանկյան մակերեսի փոքրագույն արժեքը:

36. R շառավղով սֆերայի կենտրոնով տարված են երեք փոխուղղահայաց հարթություններ: Գտեք այդ սֆերայի վրա գտնվող այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տարված հարթություններին համապատասխանող մեծ շրջանագծերին: (Այլ խոսքով, պետք է գտնել սֆերայի վրա առաջացած ութ կորագիծ եռանկյուններից մեկին ներգծված շրջանագծի շառավիղը:)

37. A և B կետերը դասավորված են α հարթության մի կողմում: Այդ կետերով անցնող սֆերան շոշափում է α հարթությունը M կետում: Գտեք M կետերի երկրաչափական տեղը:

38. Եռանկյան բուրգի մի գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են, իսկ այդ գագաթից էլնող կողերի երկարությունները հավասար են a , b և c : Գտնել բուրգին արտագծված և ներգծված գնդերի շառավիղները:

39. ABCD բուրգի ծավալը հավասար է V : AB կողի վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ $KM = \frac{1}{3}AB$, իսկ CD կողի վրա P և Q կետերը վերցված են այնպես, որ $PQ = \frac{1}{5}CD$: Գտեք KMPQ բուրգի ծավալը:

40. Գտեք V ծավալով երկու իրար հավասար եռանկյուն բուրգերի ընդհանուր մասի ծավալը, եթե այդ բուրգերից յուրաքանչյուրը մյուսին համաչափ է բուրգի բարձրության միջնակետի նկատմամբ:

41. Գտեք α կողով կանոնավոր տետրաեդրի պրոյեկցիայի մակերեսը այն հարթության վրա, որը զուգահեռ է տետրաեդրի երկու խաչվող կողերի միջնակետերը միացնող ուղիին, եթե մնացած կողերից մեկը այդ հարթության հետ կազմում է α անկյուն:

42. Գոյություն ունի՞ արդյոք բուրգ, որի հանդիպակաց կողերը զույգ առ զույգ հավասար են, դրանցից երկուսի երկարությունները 3 են, մյուս երկուսինը՝ 4, իսկ մնացած երկուսը հավասար են 5:

43. p հարթությունը անցնում է 3 և 4 էջերով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգով և եռանկյան հարթության հետ կազմում է α անկյուն:

Ի՞նչ անկյուն են կազմում p հարթության հետ եռանկյան էջերը:

44. Եռանկյան բուրգի հիմքի մակերեսը հավասար է s -ի, իսկ կողմնային միստերի մակերեսները հավասար են s , $2s$, $3s$: Հայտնի է, որ բուրգի հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Գտեք դրանք:

45. (օ) Դիցուք ABCD-ն ուղղանկյուն է, M-ը՝ տարածության ցանկացած կետ: Ապացուցեք, որ $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$:

46. (դ) Գտեք ուղղանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ տարածության ինչ-որ կետի հեռավորությունները ուղղանկյան երեք իրար հաջորդող գագաթներից համապատասխանաբար հավասար են 3, 5 և 4:

47 (դ) ABCDA₁B₁C₁D₁ միավոր խորանարդի AB կողի վրա K կետը վերցված է այնպես, որ $AK = \frac{1}{3}$: K և A₁ կետերով տարված հարթությունը (որը չի համընկնում խորանարդի միստի հետ) շոշափում է խորանարդին ներգծված գունդը և AD կողը հատում է M կետում: Գտեք AM-ը:

48. Գունդը շոշափում է ABCD տետրաեդրի AB, BC, CD և DA կողերը:

Ապացուցեք, որ ա) (կ) $AB + CD = BC + AD$,

բ) (դկ) կողերի հետ գնդի շոշափման կետերը գտնվում են մի հարթության մեջ:

49. Տրված է ABCDA₁B₁C₁D₁ միավոր խորանարդը: Գտեք այն սֆերայի շառավիղը, որն անցնում է A, B, C₁ կետերով և B₁C₁-ի միջնակետով:

50. ABCDA₁B₁C₁D₁ զուգահեռանիստում A₁B և B₁C կողերի վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ KM ուղիղը զուգահեռ է AC₁-ին: Գտեք KM: AC₁ հարաբերությունը:

51. Գլանի ստորին հիմքի հարթության մեջ տարված / ուղիղը շոշափում է հիմքի շրջանագիծը: / ուղղով անցնող հարթությունը նշված հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն և չի հատում գլանի վերին հիմքը: Գտեք այդ հարթությունից ներքև գտնվող գլանի մասի ծավալը, եթե գլանի հիմքի շառավիղը հավասար է r :

52. ABCD տետրաեդրում հայտնի է, որ $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$: AB և CD ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է 60° :

Գտեք AD-ն:

53. Դիտարկենք կանոնավոր տետրաեդր, որի մի կողը համընկնում է խորանարդի կողի հետ, իսկ հանդիպակաց կողի միջնակետը, խորանարդի կենտրոնի հետ: Ապացուցեք, որ այդ խորանարդի մեջ կարելի է տեղավորել ևս երկու այդպիսի տետրաեդրեր, այնպես, որ ստացված երեք տետրաեդրերից ցանկացած երկուսը իրար հետ չեն հատվում:

54. (դ) Ապացուցեք, որ փայտե խորանարդում կարելի է փորել այնպիսի անցք, որով կանցնի մույն չափերով խորանարդ:

55. R շառավղով գնդին ներգծված է մեծագույն ծավալով գլան: Ինչի^օ է հավասար նրա ծավալը:

56. Գտեք ուղղանկյունամիստի ծավալի մեծագույն արժեքը, եթե նրա երկու միստերի պարագծերը հավասար են 12 և 16:

57. Ապացուցեք, որ կանոնավոր տետրաեդրի կենտրոնից նրա գագաթները գնացող վեկտորների գումարը հավասար է 0-ի:

58. (դ) Ապացուցեք, որ բազմանիստի միստերին ուղղահայաց, բազմանիստից դուրս ուղղված և համապատասխան միստերի մակերեսներին թվապես հավասար երկարություններ ունեցող վեկտորների գումարը հավասար է 0:

59. (դ) Քանի^օ իրարից տարբեր կանոնավոր բուրգեր գոյություն ունեն, որոնց հիմքի կողմը հավասար է 26, իսկ կողմնային միստին արտագծված շրջանագծի շառավիղը հավասար է 15:

60. (դ) ABCD բուրգում $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, DB կողը ուղղահայաց է ABC հարթությանը, AC, CD և DA կողերով երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Գտեք այդ անկյունները:

61. (դ) Եռանկյուն բուրգի երեք կողերը գույգ առ գույգ փոխուղղահայաց են և հավասար են 1, 2 և 3: Գտեք բոլոր հնարավոր այն գնդերի շառավիղները, որոնք շոշափում են բոլոր այն չորս հարթությունները, որոնցում գտնվում են այդ բուրգի միստերը:

62. (դ) Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է a կողով կանոնավոր տետրաեդրը նրա երկու հանդիպակաց կողերի միջնակետերով անցնող ուղղի շուրջը պտտելիս:

63. (դ) Եռանկյան բուրգի բոլոր միստերը ուղղանկյան եռանկյուններ են: Ամենամեծ կողի երկարությունը a է, իսկ նրա հանդիպակաց կողի երկարությունը՝ b : Ամենամեծ կողին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է α -ի: Գտեք բուրգի ծավալը:

64. (դ) Գտեք այն զուգահեռանիստի ծավալը, որի երեք կողերը դասավորված են 1 ծավալով եռանկյուն պրիզմայի երեք նիստերի խաչվող անկյունագծերի վրա:

65. (դ) ABCD տետրաեդրին ներգծած գունդը շոշափում է ABC նիստը M կետում: Ապացուցեք, որ AMC անկյունը հավասար է ABCD տարածական քառանկյան անկյունների կիսագումարին:

66. (դ) Տետրաեդրի բոլոր նիստերը իրար նման ուղղանկյուն եռանկյուններ են: Գտեք ամենամեծ և ամենափոքր կողերի հարաբերությունը:

67. (դ) Երկու խաչվող և փոխուղղահայաց ուղիղների հեռավորությունը հավասար է d -ի: A և B կետերը գտնվում են այդ ուղիղներից մեկի վրա և դասավորված են այդ ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացի հիմքի մի կողմում նրանից a և b հեռավորությունների վրա: Դիցուք M-ը մի որևէ կետ է մյուս ուղիղի վրա: Գտեք AMB անկյան ամենամեծ արժեքը:

68. (դ) Տրված են r և R շառավիղներով երկու համակենտրոն սֆերաներ ($r < R$): Գլանի հիմքերի շրջանագծերը գտնվում են այդ սֆերաների վրա, ընդ որում՝ հիմքերից մեկը շոշափում է փոքր սֆերային: Գտեք գլանի բարձրությունը:

69. (դ) Երկնիստ անկյան կողի վրա գտնվող A կետով տարված հարթությունը այդ անկյան նիստերից մեկը հատում է AB ճառագայթով, իսկ մյուսը՝ AC ճառագայթով: Դիտարկենք երկու սֆերաներ, որոնք շոշափում են երկնիստ անկյան երկու նիստերը, BAC հարթությունը և գտնվում են այդ հարթության տարբեր կողմերում: Դիցուք K-ն և M-ն այդ սֆերաների և երկնիստ անկյան նիստերից մեկի շոշափման կետերն են: Ապացուցեք, որ $\angle BAC = \angle KAM$:

70. (դ) Բուրգի հիմքը քառանկյուն է, որի երկու կողմերը հավասար են 10-ի, իսկ մյուս երկուսը՝ 6-ի: Բուրգի բարձրությունը հավասար է 7-ի: Բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60° -ի անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ **ՏԱՐԱԾԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՄԲՈՂՋ** **ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ**

Կանոնավոր եռանկյուն բուրգ

1. Գտնել կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողը, եթե նրա հիմքի կողմի երկարությունը է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $9\sqrt{6}$:
2. Գտնել կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, եթե նրա հիմքի կողմը $4\sqrt{3}$ է, իսկ կողմնային նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը՝ 60° :
3. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությունը 6 է, կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալը:
4. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 14 է, իսկ գագաթի հարթ անկյունը՝ 90° : Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
5. Գտնել կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, եթե նրա բարձրությունը է, իսկ կողմնային նիստերի կազմած անկյունը՝ 60° :
6. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությամբ և կողմնային կողերից մեկով անցնող հատույթի մակերեսը 2 անգամ մեծ է հիմքի մակերեսից: Բուրգի կողմնային կողը 12 է: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
7. SABC բուրգի բոլոր կողերը 6 են: AB և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են M և N կետերն այնպես, որ $AM : MB = SN : SC = 1 : 2$: Գտնել MN-ը:
8. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 16 է, իսկ կողմնային կողը՝ 12: M-ը AB կողի միջնակետն է, իսկ AN-ը SAC եռանկյան կիսորդն է: Գտնել MN-ը:
9. Կանոնավոր եռանկյան բուրգի կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Որոշել բուրգի ծավալը, եթե հիմքի գագաթի հեռավորությունը հանդիպակաց նիստից 3 է:
10. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերի կազմած անկյունը $2 \arctg \frac{3}{4}$ է: Գտնել կողմնային կողի և բուրգի բարձրության կազմած անկյունը:
11. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստի մակերեսը 18 է, իսկ կողմնային նիստերը կազմում են 60° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալը:
12. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողը 6 է: SB կողի վրա նշված է D կետն այնպես, որ $SD : DB = 1 : 3$: Գտնել բուրգի ծավալը, եթե հայտնի է, որ ADC եռանկյան մակերեսը 27 է:
13. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի գագաթից կողմնային նիստին տարված ուղղահայացով բուրգի բարձրությունը բաժանվում է 4 և 10 երկարությամբ մասերի՝ հաշված հիմքից: Գտնել բուրգի ծավալը:

14. S գազաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60° անկյուն: Բուրգի SD բարձրության վրա նշված է K կետն այնպես, որ $SK : KD = 1 : 2$: K կետի հեռավորությունը կողմնային միստից 4 է: Գտնել բուրգի ծավալը:

15. SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի A գազաթով BSC նիստին ուղահայաց տարված է հարթություն: Այդ հարթության և BSC նիստի հատման գիծը այդ նիստը բաժանում է գազաթով եռանկյան և սեղանի, որոնց մակերեսները հարաբերում են ինչպես $1 : 24$: Ինչ՞հարաբերությամբ է այդ հարթությունը բաժանում բուրգի S գազաթից տարված բարձրությունը:

16. SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 12 է, իսկ բարձրությունը՝ 8: Գտնել SC կողմնային կողի միջնակետով տարված այն հատույթի մակերեսը, որն ուղահայաց է հիմքի հարթությանը և զուգահեռ է B գազաթից տարված հիմքի բարձրությանը:

17. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 3 է, իսկ կողմնային կողը՝ 6: Բուրգի հիմքի կողմով տարված հատույթը հավասարաբար է եռանկյուն է, որի սրունքը կիսում է բուրգի կողմնային նիստի անկյուններից մեկը: Որոշել այդ հատույթի մակերեսը:

18. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը 3 են: M-ը ABC հիմքի կենտրոնն է, N-ը SAB նիստի միջնագծերի հատման կետը: M և N կետերով տարված է AB կողին զուգահեռ հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

19. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը 12 են: M-ը ABC հիմքի CD բարձրության միջնակետն է, N-ը SAB նիստի հարթագծի միջնակետը: M և N կետերով տարված է AB կողին զուգահեռ հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

20. S գազաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգում E-ն SBC նիստի հարթագծի միջնակետն է: Բուրգի AB, AC և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են F, L և M կետերն այնպես, որ EFLM-ը շեղանկյուն է: Գտնել բուրգի կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

21. S գազաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգում E-ն SBC նիստի միջնագծերի հատման կետն է: Բուրգի AB, AC և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են F, L և M կետերն այնպես, որ EFLM-ը $EF = b$ հիմքով հավասարաբար սեղան է: Գտնել բուրգի հարթագիծը, եթե $AL : AC = 1 : k$:

22. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: AB, BC և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են P, Q և R կետերն այնպես, որ $AP = PB$, $BQ : QC = SR : RC = 1 : 2$: P, Q և R կետերով անցնող հարթությունը SA կողը հատում է L կետում: Գտնել PL և LQ ուղիղների կազմած անկյունը:

23. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: SC կողով տարված է AB-ին զուգահեռ հարթություն: Գտնել AS կողի և այդ հարթության կազմած անկյունը:

Եռանկյուն բուրգ

1. Եռանկյան բուրգի կողմնային կողերը 4, 5 և 6 են և իրար փոխուղահայաց են: Գտնել բուրգի բարձրությունը:

2. Եռանկյան բուրգի երեք նիստերը փոխուղահայաց են: Այդ նիստերի մակերեսները 6, 4 և 3 են: Գտնել բուրգի ծավալը:

3. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, իսկ կողմնային կողերը հավասարապես են թեքված հիմքի նկատմամբ: Բուրգի բարձրությունը 12 է, իսկ գագաթին կից երկու փոքր անկյունները՝ 60° և 90° : Որոշել բուրգի կողմնային կողերի երկարությունները:

4. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի էջերը հարաբերում են ինչպես 3 : 4: Բուրգի կողմնային նիստերը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված են 45° անկյան տակ, իսկ մեծ կողմնային նիստի մակերեսը $10\sqrt{2}$ է: Որոշել հիմքի փոքր էջի երկարությունը:

5. Եռանկյան բուրգի երկու փոխուղահայաց նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են, որոնց կողմը 4 է: Գտնել բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

6. Եռանկյուն բուրգի երկու նիստերի մակերեսները 24 և 36 են, նրանցով կազմված երկնիստ անկյունը 30° , իսկ նրանց ընդհանուր կողը՝ 12: Գտնել բուրգի ծավալը:

7. SABC բուրգի ծավալը 36 է: AB կողի վրա նշված են M և N կետերն, իսկ CS կողի վրա P և Q կետերն այնպես, որ $MN : AB = 1 : 2$, $PQ : CS = 1 : 3$: Գտնել MNPQ բուրգի ծավալը:

8. SABC բուրգի հիմքը ABC եռանկյունն է, որում $AB = 5$, $BC = 9$ և $AC = 6$: SAB և SAC նիստերը ուղղահայաց են ABC հարթությանը, իսկ SBC նիստն այդ հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալը:

9. SABC եռանկյուն բուրգի ASB և BSC նիստերի միջնագծերի հատման կետերի հեռավորությունը 6 է: Գտնել AC կողի երկարությունը:

10. Եռանկյուն բուրգի նիստերի մակերեսները 3, 4, 5 և 6 են: մակերեսով նիստին առնթեր երկնիստ անկյունները միմյանց հավասար են: Գտնել 3 և 5 մակերեսներով նիստերի կազմած երկնիստ անկյունը:

11. SABC եռանկյուն բուրգի AC կողով և BSC նիստի միջնագծերի հատման կետով տարված է հարթություն: Ի՞նչ հարաբերության մասերի է բաժանվում բուրգի ծավալն այդ հարթությամբ:

12. SABC եռանկյուն բուրգի ABC նիստի մակերեսը 2 անգամ մեծ է ASB նիստի մակերեսից: CS կողի վրա նշված է M կետն այնպես, որ $CM : MS = 2 : 3$: M կետով տարված են ABC և ASB նիստերին զուգահեռ հարթություններ: Գտնել առաջացած հատույթների մակերեսների հարաբերությունը:

13. M կետը SABC եռանկյուն բուրգի SA կողի միջնակետն է: AB և AC ճառագայթների վրա համապատասխանաբար ընտրված են N և K կետերն այնպես, որ $AB : AN = 1 : 2$ և $AC : AK = 1 : 3$: Ի՞նչ հարաբերության մասերի են բաժանվում SB և SC կողերը M, N, K կետերով անցնող հարթությամբ:

14. SABC եռանկյուն բուրգի SAB և SAC նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը: S գագաթով տարված է BC կողմին զուգահեռ հարթություն, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն: Հայտնի է, որ այդ հատույթի մակերեսը 2 է, SBC նիստի մակերեսը՝ $6\sqrt{3}$, իսկ $BC = 6$: Գտնել բուրգի ծավալը:

15. SABC բուրգի հիմքը a կողմով ABC կանոնավոր եռանկյուն է: SAB նիստը հավասար է հիմքին և ուղղահայաց է նրա հարթությունը: Բուրգի AB կողմին զուգահեռ հատույթը քառակուսի է: Գտնել նրա մակերեսը:

16. SABC բուրգի հիմքը A ուղիղ անկյունով ABC հավասարասրուն եռանկյունն է: SA կողը բուրգի բարձրությունն է, O-ն բուրգին արտագծած գնդի կենտրոնը, իսկ H-ը՝ ASB նիստի միջնագծերի հատման կետը: Գտնել OAHB բուրգի ծավալը, եթե $AO = 10$, $AS = 12$:

17. SABC բուրգի հիմքը B ուղիղ անկյունով ABC եռանկյունն է: Բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են: BC էջին տարված միջնագծով և SC կողմի միջնակետով անցնող հարթությունը բուրգի հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն, իսկ այդ հարթությամբ առաջացած հատույթի մակերեսը Q է: Գտնել բուրգի ծավալը, եթե նրա բարձրությունը h է:

18. SABC-ն ABC հիմքով եռանկյուն բուրգ է: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքի միջնագծերի հատման կետով: Բուրգի հիմքի մակերեսը 3 է: Գտնել ASB նիստի մակերեսը, եթե այն հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն:

19. SABC բուրգի SB վրա նշված են P և Q կետերն այնպես, որ $SP = 1$ և $SQ = 2$: P և Q կետերով տարված են SB կողին ուղղահայաց հարթություններ: Հայտնի է, որ Q կետով տարված հարթությունը բուրգը հատում է եռանկյունով, որի մակերեսը 16 է: Գտնել բուրգի այն մասի ծավալը, որն ընկած է տարված հարթությունների միջև:

20. SABC եռանկյուն բուրգի հիմքը ABC կանոնավոր եռանկյունն է, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսները միմյանց հավասար են: Գտնել B գագաթով անցնող և SC-ին ուղղահայաց հատույթի մակերեսը, եթե $SA = 2$ և $SB = \sqrt{2}$:

21. SABC եռանկյուն բուրգի բարձրությունը H է, կողմնային կողերը ABC հիմքի հարթության հետ կազմում են 45° անկյուն, իսկ հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է $\angle C = 90^\circ$ և $\angle B = 30^\circ$: Գտնել գագաթով անցնող և AB-ին զուգահեռ այն հատույթի մակերեսը, որը ASB նիստը տրոհում է հավասարամեծ մասերի:

22. ABC եռանկյուն բուրգի ծավալը 5 է: AS և BC կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը SA կողը հատում է M կետում այնպես, որ $SM : MC = 2 : 3$: Գտնել նշված հարթությամբ բուրգի հատույթի մակերեսը, եթե A գագաթի հեռավորությունը այդ հարթությունից է:

23. SABC եռանկյուն բուրգի SB կողմնային կողով և AC կողի E միջնակետով տարված է հարթություն, որը SAB և SBC նիստերի հետ կազմում է համապատասխանաբար α և β անկյուններ: Գտնել բուրգի ծավալը, եթե SBE եռանկյան մակերեսը Q է և $SB = a$:

24. SABC եռանկյուն բուրգի հիմքը ABC ուղղանկյուն եռանկյունն է, իսկ SA կողը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: AB, AC էջերի և CS կողմնային կողի վրա վերցված են համապատասխանաբար M, N և P կետերն այնպես, որ $AM : MB = AN : NC = CP : PS = 1 : 4$: Գտնել M, N և P կետերով անցնող հարթության և բուրգի հիմքի հարթության կազմած անկյունը և հաշվել առաջացած հատույթի մակերեսը, եթե $BC = 8$, $SA = 2$ և $\angle ABC = 30^\circ$:

25. SABC եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստերը ABC հիմքի հարթության հետ կազմում է միևնույն անկյունը, SO-ն բուրգի բարձրությունն է: Գտնել AOB

և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $\angle ASB = \frac{7\pi}{12}$,

$\angle BSC = \frac{\pi}{2}$ և $\angle SCA = \frac{\pi}{3}$:

26. SABC եռանկյուն բուրգի A զագաթով անցնող հարթությունը կիսում է SAB նիստի SK միջնագիծը, իսկ SAC նիստի SL միջնագիծը հատում է այնպիսի D կետում, որ $2SD = DL$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում բուրգի ծավալն այդ հարթությամբ:

27. SABC եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստերը ABC հիմքի հարթության հետ կազմում է միևնույն անկյունը, SO-ն բուրգի բարձրությունն է և O կետը ABC եռանկյան ներսում է: Գտնել AOB և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $\angle ASB = 105^\circ$, $\angle BSC = 90^\circ$ և $\angle SCA = 60^\circ$:

28. SABC եռանկյուն բուրգի ABC հիմքի մակերեսը p է: K-ն և M-ը համապատասխանաբար AB և AC կողերի միջնակետերն են: Գտնել SBC նիստի մակերեսը, եթե MSK հատույթի մակերեսը q է, իսկ բուրգի բարձրությունն անցնում է ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետով:

29. SABC բուրգի հիմքը ABC հավասարակողմ եռանկյունն է, որի կողմը 2 է: SO-ն բուրգի բարձրությունն է և O կետը ABC եռանկյան ներսում է: Հայտնի է, որ $OA : OB : OC = 1 : 1 : 2$ և SAB նիստի մակերեսը 6 է: Գտնել SO բարձրությունը:

30. SABC բուրգի SO բարձրությունն անցնում է ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետով: Հայտնի է, որ $\angle BSC = 90^\circ$ և $\angle SBC = 30^\circ$: Գտնել ASC և ASB նիստերի մակերեսների հարաբերությունը:

31. Եռանկյուն բուրգի հիմքը հավասարակողմ եռանկյուն է, որի կողմը 6 է: Կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60° անկյուն: Գտնել բուրգի բարձրության բոլոր հնարավոր արժեքները:

32. Եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմերը 5, 5 և 6 են: Կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալի ամենափոքր հնարավոր արժեքը:

33. SABC բուրգի կողմնային կողերը միմյանց հավասար են: Հայտնի է, որ $\angle ASB = 90^\circ$, $\angle ASC = 50^\circ$ և $\angle BSC = 140^\circ$: Գտնել ABC եռանկյան անկյունները:

34. ASBC բուրգի ծավալը 27 է: AB և SC կողերին զուգահեռ երկու հարթությունները BC կողը բաժանել են երեք հավասար մասերի: Գտնել բուրգի այն մասի ծավալը, որն ընկած է այդ հարթությունների միջև:

Կանոնավոր քառանկյուն բուրգ

1. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 2 է, իսկ բուրգի բարձրության միջնակետի հեռավորությունը հիմքի գագաթից՝ $\sqrt{3}$: Գտնել բուրգի ծավալը:

2. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի անկյունագիծը 18 է, իսկ կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

3. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են: Բուրգի գագաթով հիմքի կողմին զուգահեռ տարված հարթությունը հատում է հիմքը α անկյան տակ: Որոշել ստացված հատույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի կողմը a է:

4. Կանոնավոր քառանկյան բուրգի բարձրությունը 20 է, իսկ հիմքի կողմը՝ 30: Հիմքի կողմով տարված է հարթություն, որն ուղահայաց է հանդիպակաց կողմնային նիստին: Որոշել այն մասերի ծավալները, որոնց բուրգը տրոհվում է այդ հարթությունով:

5. SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 6 է, իսկ կողմնային նիստի բարձրությունը՝ 7: Գտնել B գագաթով և SC կողմնային կողի միջնակետով տարված այն հատույթի մակերեսը, որն ուղահայաց է հիմքի հարթությանը:

6. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը 12 է և հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն: Կողմնային կողի միջնակետով տարված է նրան ուղահայաց հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

7. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքին կից երկնիստ անկյունը 60° է: Հիմքի կողմով տարված է հարթություն, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում այդ հարթությունը բուրգի այն կողմնային նիստերի մակերեսները, որոնց նա տրոհում է երկու եռանկյունների:

8. S գագաթով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը b է, իսկ հանդիպակաց կողմնային կողերի կազմած անկյունը՝ 2α : Հիմքի A գագաթով և բուրգին արտագծած սֆերայի կենտրոնով տարված է հարթություն, որը զուգահեռ է հիմքի BD անկյունագծին: Գտնել առաջացած հատույթի մակերեսը:

9. S գագաթով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողը a է. կողմնային կողը՝ $2a$: Հիմքի BD անկյունագծի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ $DM : DB = 1 : 3$, իսկ SC կողմի վրա ընտրված է N կետն այնպես, որ MN-ը զուգահեռ է SAD հարթությանը: Գտնել MN-ը:

10. S գագաթով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի SB և SC կողերի միջնակետերով տարված է SAD նիստին ուղահայաց հարթություն: Բուրգի հիմքի մակերեսը $8\sqrt{2}$ անգամ մեծ է առաջացած հատույթի մակերեսից: Գտնել կողմնային նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

11. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի զագաթով տարված է հանդիպակաց կողմնային կողին ուղղահայաց հարթություն: Գտնել առաջացած հատույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի մակերեսը S է, իսկ կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն:

Քառանկյուն բուրգ

1. SABCD բուրգի հիմքը ABCD քառակուսին է: SB կողմնային կողը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: K-ն և M-ը համապատասխանաբար SB և SC կողմերի միջնակետերն են: AKMD հարթությունը բուրգի հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն: Գտնել AKMD հատույթի մակերեսը, եթե $SB = l$:

2. Բուրգի հիմքը 81 մակերեսով ուղղանկյուն է: Բուրգի երկու կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, իսկ մյուս երկուսը նրա հետ կազմում են 30° և 60° անկյուններ: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

3. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի մեծ հիմքը 24 է, իսկ սրունքը՝ 15: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով, իսկ կողմնային մակերևույթը 300 է: Գտնել բուրգի ծավալը:

4. PABCD բուրգի հիմքը ABCD քառակուսին է: BP կողմնային կողը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և K-ն PC կողի միջնակետն է: Գտնել BKD եռանկյան մակերեսը, եթե այդ եռանկյան հարթությունը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն և $BP = 12$:

5. SABCD բուրգի հիմքը $AB = 4$ և $BC = 2$ կողերով ուղղանկյուն է: Բոլոր կողմնային կողերը 5 են, իսկ M-ը AS կողի միջնակետն է: BM ուղղով AC ուղղին զուգահեռ տարված հարթությունը ի՞նչ անկյուն է կազմում SAC հարթության հետ:

6. SABCD բուրգի հիմքը ABCD զուգահեռագիծն է: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում բուրգի ծավալը AB ուղղով և SCD նիստի միջին գծով անցնող հարթությունը:

Վեցանկյուն բուրգ

1. Գտնել կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի ծավալը, եթե հիմքի կողմը 8 է, իսկ փոքր անկյունագծային հատույթի մակերեսը՝ $20\sqrt{3}$:

2. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի բարձրությունը 4 է, իսկ հիմքի կողմը՝ 8: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

Հատած բուրգ

1. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի հիմքի կողմերը 10 և 4 են, իսկ մեծ հիմքին առնթեր երկնիստ անկյունը՝ 60° : Գտնել հատած բուրգի ծավալը:

2. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի ստորին հիմքի կողմը 8 է, վերին հիմքը՝ 5, իսկ բարձրությունը՝ 3: Ստորին հիմքի կողմով և վերին հիմքի նրա հանդիպակաց զագաթով տարված է հատույթ: Գտնել հատույթի մակերեսը:

3. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի մեծ հիմքի կողմը 8 է, փոքրի կողմը՝ 6: Կողմնային կողը հիմքի հետ կազմում է 60° անկյուն: Գտնել կողմնային կողով անցնող և հիմքին ուղղահայաց հատույթի մակերեսը:

4. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի $ABB_1 A_1$ նիստին ներգծած շրջանագիծը շոշափում է AA_1 կողը K կետում այնպես, որ $AK = 4$, $A_1 K = 1$: Գտնել հատած բուրգի ծավալը:

Խառը խնդիրներ

1. $SABC$ եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը a են: Բուրգի A գագաթով անցնող հարթությունը զուգահեռ է BC կողին և ուղղահայաց է SBC նիստին: Գտնել այն սֆերայի շառավիղը, որը շոշափում է այդ հարթությունը և SA , SB , SC կողերը:

2. $SABC$ եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը a են: Գտնել այն սֆերայի շառավիղը, որն անցնում է BC կողի միջնակետով և շոշափում է AS , AC , AB կողերը:

Խորանարդ

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը 12 է: Գտնել A գագաթի հեռավորությունը $B_1 D_1$ ուղղից:

2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ -ն խորանարդ է: Գտնել BD_1 և $B_1 C$ ուղիղների կազմած անկյունը:

3. P -ն $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի CC_1 կողի միջնակետն է: $A_1 B_1$ կողի վրա նշված է Q կետն այնպես, որ $A_1 Q : QB_1 = 1 : 2$: Գտնել PQ ուղղի $ABCD$ հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

4. M -ը $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի AB կողի միջնակետն է: Գտնել $A_1 B$ ուղղի և M , C , B_1 կետերով անցնող հարթության կազմած անկյունը:

5. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը 18 է: Գտնել A գագաթի հեռավորությունը AD , CD և DD_1 կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունից:

6. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը 16 է: M -ը և N -ը համապատասխանաբար AB և BB_1 կողերի միջնակետերն են: Գտնել A_1 գագաթի հեռավորությունը M , N և C կետով անցնող հարթությունից:

7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը 1 է, O -ն խորանարդի սիմետրիայի կենտրոնն է, իսկ L -ը AD կողի միջնակետը: Գտնել A_1 կետի հեռավորությունը $B_1 OL$ եռանկյան հարթությունից:

8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը a է: Գտնել D , B և C_1 կետերով անցնող հարթությանը զուգահեռ և A գագաթով անցնող հատույթի մակերեսը:

9. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը a է: $B_1 C_1$ կողի վրա ընտրված է P , իսկ AD կողի վրա Q կետն այնպես, որ $C_1 P : PB_1 = DQ : QA = 1 : 2$: Գտնել D_1 , P և Q կետերով անցնող հատույթի մակերեսը:

10. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը a է: A գագաթով տարված է BD ուղղին զուգահեռ հարթություն, որը $ABCD$ հիմքի հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

11. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը a է: A գագաթով տարված է BD ուղղին զուգահեռ հարթություն, որը AB ուղղի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

12. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի BB_1 և DD_1 կողերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ $BM : MB_1 = 1 : 2$ և $DN : ND_1 = 1 : 2$: A , M և N կետերով անցնող հարթությունը խորանարդը տրոհում է երկու մասի: Գտնել այդ մասերի ծավալների հարաբերությունը:

13. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կողը a է, M -ը $A_1 D_1$ կողի միջնակետն է: M կետով տարված է ուղիղ, որը BC_1 և DC հատվածները պարունակող ուղիղների հետ հատվում է համապատասխանաբար P և Q կետերում: Գտնել PQ -ն:

Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա

1. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային կողը հավասար է հիմքի բարձրությանը, իսկ նրանցով տարված հատույթի մակերեսը 12 է: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

2. $ABCA_1 B_1 C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի BC և $A_1 C_1$ կողերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են P և Q կետերն այնպես, որ $BP : PC = 1 : 4$, $A_1 Q = QC_1$: Գտնել պրիզմայի ծավալը, եթե հայտնի է, որ PQ ուղիղը ABC հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն, իսկ հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը 6 է:

3. $ABCA_1 B_1 C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB : AA_1 = 2 : 1$: M -ը հիմքի BC կողմի միջնակետն է: Գտնել $A_1 M$ և $B_1 C$ ուղիղների կազմած անկյունը:

4. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմով և հանդիպակաց կողմնային կողի միջնակետով տարված է հարթություն: Ստացված հատույթի մակերեսը 0,25 է, իսկ գագաթի անկյունը՝ 30° : Գտնել պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

5. Օ-ն $ABCA_1 B_1 C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի ABC հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, M -ը՝ $B_1 C_1$ կողի միջնակետը: Գտնել O և M կետերով անցնող և AB կողին զուգահեռ հատույթի մակերեսը, եթե $AB = 24$ և $AA_1 = 3$:

6. $ABCA_1 B_1 C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB = 12$, $AA_1 = 9$: A և B գագաթներով անցնող հարթությունը ABC հիմքի հետ կազմում է 60° անկյուն: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

7. $ABCA_1 B_1 C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի բոլոր կողերը a են: A_1 գագաթով տարված է հարթություն, որն ուղղահայաց է AB_1 ուղղին: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

8. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողը a է: D-ն AB-ի միջնակետն է, իսկ E-ն գտնվում է A_1C_1 կողի վրա: DE ուղիղը ABC և AA_1C_1C հարթությունների հետ կազմում է α և β անկյուններ: Գտնել պրիզմայի բարձրությունը:

9. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB = 8$, $AA_1 = 4$: M-ը հիմքի կողմի միջնակետն է: Գտնել A_1 կետի հեռավորությունը A, M և B_1 կետերով անցնող հարթությունից:

10. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողը 3 է, իսկ կողմնային կողը՝ 1: CC_1 , B_1C_1 կողերի միջնակետերով և ABC հիմքի կենտրոնով տարված է հարթություն: Գտնել այդ հարթության և BB_1C_1C նիստի կազմած անկյունը:

11. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի ABC հիմքի կողմը 24 է: A գագաթը չպարունակող կողմնային կողերի վրա նշված են B_1 և B_2 կետերը, որոնց հեռավորությունները հիմքի հարթությունից 12 և 24 են: Գտնել ABC և AB_1B_2 հարթությունների կազմած անկյունը:

12. K-ն և P-ն $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի A_1B_1 և A_1C_1 կողերի միջնակետերն են: Գտնել BKPC քառանկյան և ABC եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը, եթե հայտնի է, որ BKPC քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ:

13. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 4 է: Գտնել պրիզմայի ծավալը, եթե հայտնի է, որ AB_1 և A_1C ուղիղների կազմած սուր անկյունը 60° է:

14. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB = 6$, $BB_1 = 4$: M-ը B_1C_1 կողի միջնակետն է: A, B և M կետերով անցնող հարթությունը պրիզման տրոհում է երկու մասի: Գտնել այն մասի ծավալը, որը պարունակում է B գագաթը:

15. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում AB_1 հատվածի միջնակետով տարված է AB_1 -ին ուղղահայաց հարթություն, որն AB կողը հատում է P կետում: Գտնել ստացված հատույթի պարագիծը, եթե հայտնի է, որ $AP : PB = 5 : 3$ և $AB = 18$:

16. AB_1C_1 և A_1BC հարթությունները $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզման բաժանում են չորս մասի: Գտնել ամենափոքր մասի ծավալը, եթե $AB = 6$ և $AA_1 = 4$:

Եռանկյուն պրիզմա

1. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Պրիզմայի հիմք կողեր հավասար են a -ի, իսկ մնացած չորս կողերը իրար հավասար են: Գտնել պրիզմայի ծավալը:

2. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը 120° անկյունով և 18 երկարությամբ սրունքով հավասարասրուն եռանկյուն է: O-ն պրիզմայի ABC հիմքն ներգծած,

իսկ O_1 -ը՝ $A_1B_1C_1$ հիմքին արտագծած շրջանագծի կենտրոններն է։ Գտնել պրիզմայի ծավալը, եթե OO_1 ուղիղը ABC հիմքի հետ կազմում է 45° անկյուն։

3. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը 60° սուր անկյունով և $\sqrt{6}$ երկարությամբ էջով ուղղանկյուն եանկյուն է։ Ներքնաձիգով անցնող կողմնային նիստի անկյունագիծը տրված էջով անցնող կողմնային նիստի հետ կազմում է 45° անկյուն։ Գտնել պրիզմայի ծավալը։

4. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնաձիգը 6 է, իսկ սուր անկյունը՝ 30° ։ Այդ անկյան դիմացի էջը պարունակող կողմնային նիստի անկյունագիծը մեծ կողմնային նիստի հետ կազմում է 60° անկյուն։ Որոշել պրիզմայի բարձրությունը։

5. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի ծավալը 504 է, իսկ AA_1C_1C նիստի մակերեսը՝ 126։ Որոշել AB_1C եռանկյան մակերեսը, եթե $AB = 10$, $BC = 17$ և $\angle ABC < 90^\circ$ ։

6. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը եռանկյուն է, որի երկու կողմերը 24 և 40 են և իրար հետ կազմում են 120° անկյուն։ Գտնել այդ կողմերը պարունակող կողմնային նիստերի կազմած անկյունը կիսող հատույթի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ այն քառակուսի է։

7. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որում $\angle C = 90^\circ$ և $\angle A = 30^\circ$ ։ BB_1 կողի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ AC_1M եռանկյունը հավասարակողմ է։ Գտնել $BM : B_1M$ հարաբերությունը։

8. $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայում տարված է հատույթ, որն անցնում է A_1 , C գագաթներով և BC կողի միջնակետով։ Ինչ՞ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում պրիզմայի ծավալն այդ հատույթով։

9. Եռանկյուն պրիզմայում տարված է հատույթ, որով կողմնային կողերը տրոհվում են $2 : 1$, $3 : 4$ և $1 : 5$ հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված ստորին հիմքից։ Գտնել ստացված մասերի ծավալների հարաբերությունը։

10. $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայում տարված է հատույթ, որն անցնում է A գագաթով, BB_1 և A_1C_1 կողերի միջնակետերով։ Ինչ՞ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում պրիզմայի ծավալն այդ հատույթով։

11. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է, որում $\angle ACB = 120^\circ$ և $AB = 18$ ։ AB կողի վրա M կետն ընտրված է այնպես, որ $AM : MB = 3 : 1$ ։ M կետով տարված է AB_1 ուղղին ուղղահայաց հարթություն։ Գտնել հատույթի պարագիծը, եթե հայտնի է, որ այն հատում է A_1B_1 կողը N կետում և $A_1N : NB_1 = 1 : 3$ ։

Ուղիղ և հարթություն

1. 18 երկարությամբ հատվածը հատում է λ հարթությունը և նրա ծայրակետերի հեռավորությունը λ հարթությունից 4 և 5 են։ Գտնել այդ հատվածի պրոյեկցիան λ հարթության վրա։

2. AB հատվածը չի հատվում λ հարթության հետ: AB-ի վրա նշված է M կետն այնպես, որ $AM : MB = 1 : 2$: A և B ծայրակետերի հեռավորությունը λ հարթությունից 6 և 18 են: Գտնել M կետի հեռավորությունը λ հարթությունից:

3. Հարթությունից դուրս գտնվող կետից տարված են նրա հետ 60° և 45° անկյուններ կազմող երկու թեքեր, որոնց հիմքերի հեռավորությունը է, իսկ հարթության վրա նրանց պրոյեկցիաների կազմած անկյունը՝ 60° : Գտնել թեքերի երկարությունները:

4. M կետի հեռավորությունը տրված 60° անկյան կողմերից համապատասխանաբար 7 և 9 է, իսկ գագաթից՝ 15: Գտնել M կետի հեռավորությունը այդ անկյան հարթությունից:

5. ABC ուղղանկյուն եռանկյան A և B սուր անկյունների գագաթներից եռանկյան հարթությանը կանգնեցված են AA_1 և BB_1 ուղղահայացները: Գտնել C գագաթի հեռավորությունը A_1B_1 հատվածի միջնակետից, եթե $A_1C = 6$, $A_1A = 2$, $B_1C = 8$, $B_1B = 4$ և A_1B_1 հատվածը հատվում է եռանկյան հարթության հետ:

6. ABC եռանկյան A գագաթը պատկանում է λ հարթությանը, իսկ B և C գագաթների հեռավորությունները այդ հարթությունից 8 և 20 են: Հայտնի է, որ BC հատվածը հատվում է λ հարթության հետ: Գտնել ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը λ հարթությունից:

7. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB կողմը գտնվում է λ հարթության մեջ, իսկ BC կողմը այդ հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել այդ եռանկյան BD միջնագծի և λ հարթության կազմած անկյունը:

8. AC ուղղով անցնող λ հարթությունը ABC եռանկյան հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Որոշել B գագաթի հեռավորությունը λ հարթությունից, եթե $AB = 9$, $BC = 6$, $AC = 5$:

9. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգով տարված հարթությունն էջերի հետ կազմում է 30° և 45° անկյուններ: Գտնել այդ հարթության և եռանկյան հարթության կազմած անկյունը:

10. ABC ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթով տարված է ներքնաձիգին զուգահեռ, նրանից 1 հեռավորություն ունեցող հարթություն: Էջերի պրոեկցիաները այդ հարթության վրա 3 և 5 են: Գտնել եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը:

11. ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 120° է: C կետով տարված է AB հիմքին զուգահեռ, նրանից 3 հեռավորություն ունեցող հարթություն: Սրունքի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա 4 է: Գտնել ABC եռանկյան կողմերը:

12. 20 և 50 կողմեր ունեցող զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման O կետում զուգահեռագծի հարթությանը կանգնեցված OM ուղղահայացը: Գտնել M կետի հեռավորությունը զուգահեռագծի կողմերից, եթե հայտնի է, որ զուգահեռագծի անկյուններից մեկը 30° է:

13. Սեղանի մեծ հիմքով տարված է հարթություն, որի հեռավորությունը անկյունագծերի հատման կետից 12 է: Գտնել սեղանի մյուս հիմքի հեռավորությունն այդ հարթությունից, եթե հիմքերի երկարությունները հարաբերում են ինչպես 5 : 3:

14. α հարթության A կետով տարված է AD թեքը, որն α հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: AD -ով անցնող β հարթությունը α հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել α և β հարթությունների հատման գծի և AD ուղղի կազմած անկյունը:

15. Հարթության A կետով անցնում են a , b , c ճառագայթները, ընդ որում b -ն պատկանում է հարթությանը, a -ն հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն, իսկ c -ն a -ի պրոեկցիան է այդ հարթության վրա: Գտնել a և b ճառագայթների կազմած անկյունը, եթե c և b ճառագայթների կազմած անկյունը $\arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ է:

16. 60° երկնիստ անկյան նիստերի վրա գտնվող A և B կետրից անկյան կողմի իջեցված են AA_1 և BB_1 ուղղահայացները: Գտնել AB հատվածի երկարությունը, եթե $AA_1 = 9$, $BB_1 = 6$, $A_1B_1 = 3\sqrt{2}$:

17. Երկնիստ անկյան նիստերի վրա գտնվող A և B կետրից անկյան կողմի իջեցված են AA_1 և BB_1 ուղղահայացները: Գտնել երկնիստ անկյան մեծությունը, եթե $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$ և $AB = 7$:

18. R շառավղով շրջանագիծը և $R\sqrt{3}$ կողմով կանոնավոր եռանկյունը գտնվում են փոխուղղահայաց հարթություններում: Շրջանագծի և եռանկյան կենտրոնները միացնող հատվածը այդ հարթություններից յուրաքանչյուրի հետ կազմում է 30° անկյուն: Եռանկյան կողմերից մեկը պատկանում է շրջանագծով անցնող հարթությանը: Գտնել եռանկյան կողմի այն հատվածի երկարությունը, որը գտնվում է շրջանի ներսում:

Խառը խնդիրներ

1. $SABCD$ կանոնավոր քառանկյան բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a -ի, բարձրությունը՝ H -ի: Գտեք SA և BD ուղիղների հեռավորությունը:

2. Եռանկյուն բուրգի գագաթի հարթ անկյուններից մեկը ուղիղ է: Բուրգի բարձրությունը անցնում է հիմքի բարձրությունների հատման կետով: Գտեք բուրգի գագաթի մյուս հարթ անկյունները:

3. Որպես $SABCD$ բուրգի հիմք է ծառայում քառակուսին: SA կողը ուղղահայաց է հիմքին: Հիմքի մակերեսը m անգամ փոքր է կողմնային մակերևույթի մակերեսից: Գտեք SCD և SBC նիստերի թեքության անկյունները հիմքի հարթության նկատմամբ:

4. 1. Կառուցեք կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հատույթը, որի հարթությունը անցնում է կողմնային կողի միջնակետով, զուգահեռ է հանդիպակաց կողմի և ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը:

2. Գտեք հատած բուրգի ծավալը, եթե տրված բուրգի ծավալը հավասար է V -ի:

5. Բուրգի հիմքը Q մակերեսով և α սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Տրված անկյանը կից էջով անցնող կողմնային նիստը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: Մյուս երկու նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են β -ին հավասար անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը:

6. Կոնին ներգծած է $SABC$ բուրգը: Նրա հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է ($AB = AC$), $BC = a$, $\angle CAB = \alpha$), իսկ SCB կողմնային նիստը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված է β անկյան տակ: Գտեք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

7. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կենտրոնից մինչև կողմնային նիստը եղած հեռավորությունը հավասար է b , բուրգի բարձրության և կողմնային նիստի կազմած անկյունը հավասար է α -ի: Գտեք տրված բուրգին ներգծած կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

8. Գտեք տարածության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների տարբերությունը տրված երկու կետերից հավասար է k^2 :

9. Գտեք տարածության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների գումարը տրված երկու կետերից հավասար է k^2 :

10. α -ին հավավար երկնիստ անկյան կողը անցնում է R շառավղով սֆերայի կենտրոնով: Գտեք սֆերայի այն մասի մակերեսը, որը պարունակվում է երկնիստ անկյան մեջ:

11. Գնդին ներգծած գլանին ներգծած է գունդ: Գտեք այդ գնդերի մակերևույթների մակերեսների և ծավալների հարաբերությունը:

12. Սֆերային ներգծած կոնին ներգծած է սֆերա: Գտեք այդ սֆերաների մակերեսների հարաբերությունը, եթե կոնի ծնիչը և հիմքի հարթության միջև կազմված անկյունը հավասար է φ :

13. Հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը m անգամ մեծ է նրան ներգծած սֆերայի մակերեսից: Գտեք հատած կոնի ծնիչի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

14. Սֆերային ներգծված է կանոնավոր քառանկյուն բուրգ: Գտեք բուրգի ծավալը, եթե սֆերայի շառավիղը հավասար է 12 սմ, իսկ բուրգի հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է 6 սմ:

15. Սֆերային ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն բուրգ: Գտեք բուրգի ծավալը, եթե նրա կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն, իսկ սֆերայի կենտրոնից մինչև բուրգի հիմքը եղած հեռավորությունը հավասար է d ($d \neq 0$, $a < 45^\circ$):

16. Ուղիղ պրիզման, որի հիմքը a և b էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուն է, ներգծված է սֆերային: Գտեք պրիզմայի բարձրությունը, եթե սֆերայի շառավիղը հավասար է R -ի:

17. Ուղիղ պրիզման, որի հիմքը $ABCD$ սեղանն է ($AB \parallel CD$), ներգծված է գնդին: Հայտնի է, որ պրիզմայի բարձրությունը հավասար է H , $AB = BC = a$, $\angle BAD = \alpha$: Գտեք գնդի ծավալը:

18. Բուրգը, որի հիմքը 6 դմ և 7 դմ կողմեր ունեցող ուղղանկյուն է, ներգծված է սֆերային: Բուրգի բարձրությունը անցնում է հիմքի գագաթով և հավասար է 6 դմ: Գտեք սֆերայի շառավիղը:

19. Բուրգը, որի համար հիմք է ծառայում a կողմ ունեցող կանոնավոր եռանկյունը, ներգծած է գնդին: Բուրգի երկու կողմնային նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, երրորդ նիստը հիմքի հետ կազմում է φ երկնիստ անկյուն: Գտեք գնդի ծավալը:

20. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծած է գունդ: Գնդի կենտրոնից մինչև բուրգի գագաթը եղած հեռավորությունը հավասար է a -ի, հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է α : Գտեք բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

21. Բուրգի հիմք է ծառայում α գագաթի անկյուն ունեցող հավասարաարուն եռանկյունը: Բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը թեքված են հիմքի հարթության նկատմամբ φ անկյան տակ: Բուրգին ներգծած գնդի ծավալը հավասար է V -ի: Գտեք բուրգի ծավալը:

22. Ուղիղ պրիզմային, որի հիմքը a էջ և նրա դիմացի α սուր անկյուն ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունն է, ներգծված է գունդ: Գտեք գնդի ծավալը:

23. Սֆերային ներգծած կանոնավոր եռանկյուն պրիզմային ներգծած է սֆերա: Գտեք այդ սֆերաների մակերեսների հարաբերությունը:

24. Ապացուցեք, որ եթե սֆերան շոշափում է զուգահեռանիստի բոլոր կողերը, ապա զուգահեռանիստը հանդիսանում է խորանարդ:

25. Գունդը ներգծած է ուղիղ պրիզմային, որի համար հիմք է հանդիսանում S մակերես և գագաթի α անկյուն ունեցող հավասարաարուն եռանկյունը: Գտեք գնդի մակերևույթի մակերեսը:

26. Հայտնի է, որ կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը m անգամ մեծ է նրան ներգծած գնդի մակերևույթի մակերեսից: Գտեք կոնի ծնիչի թեքության անկյունը հիմքի հարթության նկատմամբ:

27. Կոնին ներգծած է գունդ: Կոնի և գնդի ծավալների հարաբերությունը հավասար է 2-ի: Գտեք կոնի և գնդի լրիվ մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

28. R շառավղով գունդը ներգծած է կոնին: Գնդի կենտրոնից կոնի ծնիչը երևում է α անկյան տակ: Գտեք կոնի ծավալը:

29. Կոնի բարձրությանն ուղղահայաց հարթությունը անցնում է կոնին արտագծած գնդի կենտրոնով և կոնը բաժանում է երկու այնպիսի մասերի, որոնք ունեն հավասար ծավալներ: Գտեք կոնի ծնիչը և հիմքի հարթության միջև եղած անկյունը:

30. Հատած կոնին ներգծած է r շառավղով կոնի ծնիչը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված է α անկյան տակ: Գտեք հատած կոնի ծավալը:

31. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծած է կոն: Գտեք կոնի մակերևույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի կողմը հավասար է b -ի, իսկ բուրգի բարձրության և կողմնային միատի հարթության միջև եղած անկյունը՝ φ -ի:

32. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a -ի, հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը՝ α -ի: Բուրգին ներգծած է գլան այնպես, որ նրա մի հիմքը գտնվում է բուրգի հիսքի վրա, իսկ մյուս հիմքի շրջանագիծը կողմնային միատերից յուրաքանչյուրի հետ ունի միակ ընդհանուր կետ: Գտեք գլանի ծավալը, զիտեմալով, որ նրա բարձրությունը և հիմքի շառավիղը հավասար են:

33. Հատած կոնը ներգծած է քառանկյուն հատած բուրգին, որի համար որպես հիմք է ծառայում φ սուր անկյուն ունեցող հավասարաբարուն սեղանը: Հիմքերի կողմնային կողերը հավասար են a և b ($a > b$): Բուրգի կողմնային կողը հիմքի զուգահեռ կողմերից մեծի հետ կազմում է α անկյուն: Գտեք հատած կոնի ծավալը:

34. Կոնին ներգծած բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է ուղղանկյուն եռանկյունը: Կողմնային միատերը, որոնք անցնում են էջերով, հիմքի հետ կազմում են 30° և 60° անկյուններ: Գտնել կոնի ծավալն ու կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե բուրգի բարձրությունը հավասար է h -ի:

35. Ուղիղ պրիզմային, որի համար որպես հիմք է ծառայում α անկյուն և c ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունը, ներգծած է սֆերա: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

36. Կանոնավոր տետրաէդրը պարունակվում է R շառավղով գնդում, այնպես որ նրա երեք գագաթները պատկանում են սֆերային, իսկ սֆերայի կենտրոնը պատկանում է տետրաէդրին և գտնվում է նրա չորրորդ գագաթից d հեռավորության վրա: Գտեք տետրաէդրի կողը:

37. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմով և նրան ներգծած գնդի կենտրոնով տարված է հարթություն: Այդ հարթությունը ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում բուրգի ծավալը, եթե նրա կողմնային կողը $3,5$ անգամ մեծ է հիմքի կողմից:

38. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին, որի հիմքի կողմը հավասար է a -ի, գագաթի հարթ անկյունը՝ α -ի, ներգծած է կիսասֆերա, որի հիմքը գտնվում է բուրգի հիմքի վրա: Գտեք այն բազմանիստի ծավալը, որի չորս գագաթները կիսասֆերայի և բուրգի կողմնային միատերի շոշափման կետերն են, իսկ հինգերորդ գագաթը սֆերայի կենտրոնն է:

39. Բազմանիստը հանդիսանում է երկու կանոնավոր քառանկյուն բուրգերի միավորում, որոնք սիմետրիկ են իրենց ընդհանուր հիմքի հարթության նկատմամբ: Այդ բազմանիստին ներգծած է սֆերա: Գտեք նրա շառավիղը, եթե բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a -ի, իսկ գագաթի հարթ անկյունը՝ α -ի:

40. SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգին, որի մեջ $AB = 1$ դմ,

$SA = \frac{\sqrt{5}}{2}$ դմ, ներգծված է գունդ: SAB միստի և գնդի շոշափման կետով և S

գագաթին ամենամոտ՝ գնդի կետով տարված է հարթություն, որը զուգահեռ է AB կողմին: Գտեք գնդի՝ այդ հարթությամբ հատույթի մակերեսը:

41. Սֆերան ներգծած է ուղիղ պրիզմային, որի համար որպես հիմք է ծանալում a և b ($a > b$) երկարությամբ զուգահեռ կողմեր ունեցող ուղղանկյուն սեղանը: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

42. $SABC$ բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի CA և CB էջերը հավասար են a -ի, SC կողմնային կողը ուղղահայաց է հիմքին և նույնպես հավասար է a -ի: Գտեք այդ բուրգին ներգծած սֆերայի շառավիղը:

43. Բուրգի համար որպես հիմք է ծառայում a կողմ ունեցող քառակուսին, հիմքի կողմերին առընթեր երկու երկնիստ անկյունները ուղիղ են, իսկ մյուս երկուսը՝ φ : Գտեք բուրգին ներգծած սֆերայի շառավիղը:

44. Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը հավասարամեծ են, ապա նրան կարելի է ներգծել սֆերա: Համոզվեցեք նրանում, որ այդպիսի զուգահեռանիստի ընդհանուր անկյունագիծ չունեցող անկյունագծային հատույթները ուղղահայաց են:」

ՄՏՈՒԳԻՐ ԳԻՏԵԼԻՔՆԵՐԴ

Ստորև բերված հարյուր պնդումներից յուրաքանչյուրը կամ ճիշտ է, կամ սխալ: Նախապես պատրաստված աղյուսակի համապատասխան վանդակում պետք է գրել «այո», եթե դուք համարում եք, որ պնդումը ճիշտ է և «ոչ», եթե համարում եք, որ պնդումը սխալ է, իսկ եթե վստահ չեք պատասխանին՝ դրեք զծիկ:

Ստուգեք ձեր պատասխանները վերջում բերվածի հետ: Ամեն ճիշտ պատասխանի դեպքում դուք ստանում եք 1 միավոր, սխալ պատասխանի դեպքում պետք է հավաքված գումարից հանել 2 միավոր, իսկ զծիկ դնելու դեպքում՝ 0 միավոր: Եթե արդյունքում հավաքել եք 85 միավորից ավելի՝ դուք շատ լավ գիտեք առարկան (գնահատականը՝ 5), 71-85 միավորի դեպքում՝ ձեր գիտելիքները կարելի է գնահատել, որպես լավ (գնահատականը՝ 4), 46-70 միավորի դեպքում՝ ձեր գիտելիքները բավարար են (գնահատականը՝ 3):

Ամբողջ աշխատանքի համար տրվում է երեք ժամ: Կարելի է կատարել 5-10 րոպե տևողությամբ մի քանի ընդմիջումներ (ընդմիջման ժամանակը հաշվի չի առնվում, սակայն մեկ ժամից ավելի չպետք է լինի):

1. Տարածության ցանկացած երեք կետի համար գոյություն ունի այդ կետերը պարունակող միակ հարթություն:

2. Եթե երկու ուղիղներ ուղղահայաց են միևնույն հարթությանը, ապա այդ ուղիղները իրար զուգահեռ են:

3. Եթե երկու հարթություններ ուղղահայաց են երրորդ հարթությանը, ապա այդ հարթությունները զուգահեռ են:

4. Եթե A տետրաեդրը ամբողջովին գտնվում է B տետրաեդրում, ապա A տետրաեդրի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը անպայման փոքր է B տետրաեդրի բոլոր կողերի երկարությունների գումարից:

5. Միևնույն ուղղին ուղղահայաց երկու ուղիղներ իրար զուգահեռ են:

6. Եթե A տետրաեդրը ամբողջովին գտնվում է B տետրաեդրում, ապա A տետրաեդրի լրիվ մակերևույթի մակերեսը փոքր է B տետրաեդրի լրիվ մակերևույթի մակերեսից:

7. Եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են, ապա այդ բուրգի հիմք հանդիսացող բազմանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

8. Կանոնավոր տետրաեդրին ներգծված գնդի շառավիղը չորս անգամ փոքր է տետրաեդրի բարձրությունից:

9. Եթե եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունները հավասար են 120° և 130° , ապա նրա երրորդ հարթ անկյունը փոքր է 110° -ից:

10. Գոյություն ունի եռանկյուն բուրգ, որի բոլոր նիստերը իրար հավասար ուղղանկյուն եռանկյուններ են:

11. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի AB և $C_1 D_1$ կողերի միջնակետերով ու խորանարդի կենտրոնով անցնող հարթությամբ հատույթը կանոնավոր վեցանկյուն է:

12. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի կենտրոնով և AB , $C_1 B_1$ կողերի միջնակետերով անցնող հարթությամբ հատույթը կանոնավոր վեցանկյուն է:

13. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հանդիպակաց կողերը փոխուղահայաց են:

14. Ցանկացած կանոնավոր պրիզմայի կարելի է ներգծել գունդ:

15. Կանոնավոր պրիզմային կարելի է արտագծել գունդ:

16. Կոնի բոլոր ծնորդների միջնակետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա:

17. Խորանարդին արտագծված գնդի ծավալը $3\sqrt{3}$ անգամ մեծ է խորանարդին ներգծված գնդի ծավալից:

18. Եռանկյունը իր բարձրության շուրջը պտտելիս ստացվում է կոն:

19. Կոնի զագաթով անցնող հարթություններով կոնի բոլոր հատույթներից միշտ ամենամեծ մակերեսը ունի առանցքային հատույթը:

20. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ խորանարդի AC_1 անկյունագիծը ուղղահայաց է $A_1 BD$ հարթությանը:

21. Եթե եռանկյուն բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը հավասար է 3 սմ, ապա բուրգի ծավալը խորանարդ սանտիմետրերով արտահայտվում է նույն թվով, ինչ որ նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը քառակուսի սանտիմետրերով:

22. 2 կողով խորանարդի զագաթից մինչև խորանարդին ներգծված սֆերայի մոտակա կետը եղած հեռավորությունը հավասար է $\sqrt{2} - 1$:

23. Եթե m ուղիղը ուղղահայաց է α հարթությանը պատկանող n ուղղին, ապա α հարթության վրա m ուղղի պրոյեկցիան նույնպես կլինի n ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:

24. Ցանկացած եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունների գումարը փոքր է 360° -ից:

25. Գիտարկենք երկու իրար հավասար կանոնավոր եռանկյուն բուրգեր, որոնցից մեկը մյուսի համաչափն է բուրգի բարձրության միջնակետի նկատմամբ: Այդ բուրգերի ընդհանուր մասը զուգահեռանիստ է:

26. Կանոնավոր բուրգին ներգծված և արտագծված գնդերի կենտրոնները համընկնում են:

27. Եթե l ուղիղը հավասար անկյուններ է կազմում α հարթության մեջ գտնվող անկյան կողմերի հետ, ապա նրա պրոյեկցիան α հարթության վրա զուգահեռ է այդ անկյան կիսորդին:

28. Եթե A , B , A_1 և B_1 կետերը պատկանում են միևնույն սֆերային, իսկ AB և $A_1 B_1$ ուղիղները հատվում են M կետում, ապա $AM \cdot MB = A_1 M \cdot MB_1$:

29. Ցանկացած կանոնավոր եռանկյուն բուրգի երկու հանդիպակաց կողերի միջնակետերով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է այդ կողերին:

30. Եթե a և b ուղիղները խաչվող են, b և c ուղիղները նույնպես խաչվող են, ապա a և c ուղիղները խաչվող են:

31. Խորանարդի անկյունագիծը ուղղահայաց է խորանարդի նիստի նրա հետ չհատվող անկյունագծին:

32. Կանոնավոր բազմանիստին ներգծված և արտագծված գնդերի կենտրոնները համընկնում են:

33. 4 կողով կանոնավոր եռանկյան պրոյեկցիայի մակերեսը այդ եռանկյան հարթության հետ 30° անկյուն կազմող հարթության վրա հավասար է 12:

34. Ջուգահեռանիստի մի գագաթից ելնող կողերի ծայրակետերով անցնող հարթությունը նրա ծավալը բաժանում է $1 : 5$ հարաբերությամբ:

35. Եռանկյուն բուրգի երեք կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը նրա ծավալը բաժանում է $1 : 7$ հարաբերությամբ:

36. Եթե տարածության մի քանի ուղիղներ զույգ առ զույգ հատվում են, ապա նրանք բոլորը պատկանում են միևնույն հարթությանը:

37. Կանոնավոր տետրաեդրի երկու հանդիպակաց կողերին զուգահեռ բոլոր հարթություններով տետրաեդրի հատույթները ունեն նույն պարագիծը:

38. Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը հավասար է այդ ուղղի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի կազմած անկյանը:

39. Երկու փոխուղղահայաց ուղիղների պրոյեկցիաները հարթության վրա փոխուղղահայաց ուղիղներ են:

40. Տարածության մեջ կարելի է կառուցել վեց իրարից տարբեր և զույգ առ զույգ իրար շոշափող սֆերաներ:

41. Բուրգի երեք կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը զուգահեռ է նրա նիստերից մեկին:

42. Հարթության վրա եռանկյան բուրգի ցանկացած պատկերումը ունի քառանկյան տեսք, որի մեջ տարված են անկյունագծերը (դրանցից մեկը՝ կետագծերով):

43. Գունդը հատող հարթությունը նրա մակերևույթի մակերեսը բաժանում է նույն հարաբերությամբ, ինչ հարաբերությամբ որ նա բաժանում է գնդի այդ հարթությանն ուղղահայաց տրամագիծը:

44. Եռանկյան բուրգի երեք կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը զուգահեռ է այդ բուրգի առնվազն երկու կողերին:

45. Գոյություն ունի եռանկյուն բուրգ, որի զույգ առ զույգ հանդիպակաց կողերի երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են 3 և 3, 4 և 4, 5 և 6:

46. Եթե R և r շառավիղներով երկու սֆերաների կենտրոնների հեռավորությունը հավասար է a -ի, ապա տարբեր սֆերաների վրա գտնվող երկու կետերի փոքրագույն հեռավորությունը հավասար է $|a - (R + r)|$:

47. Եթե բազմանիստը ունի 6 նիստ, 12 կող և 8 գագաթ, ապա նրա բոլոր նիստերը քառանկյուններ են (օրինակ է ծառայում զուգահեռանիստը):

48. 1, 4 և 9-ի հավասար նիստերի մակերեսներ ունեցող ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է 6-ի:

49. Գոյություն ունի քառանկյուն բուրգ, որի երկու հանդիպակաց նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը:

50. Խորանարդի պրոյեկցիան այն հարթության վրա, որը զուգահեռ չէ նրա նիստերից ոչ մեկին, ունի վեցանկյան տեսք:

51. $\sqrt{15}$ երկարությամբ հատվածը տարածության մեջ կարելի է այնպես տե-

դավորել, որ նրա պրոյեկցիաների երկարությունները երեք զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ուղիղների վրա հավասար լինեն 1, 2 և 3:

52. Տարածության մեջ տրված են երկու խաչվող ուղիղներ: Միշտ հնարավոր է կառուցել երկու զուգահեռ հարթություններ, որոնք պարունակում են այդ ուղիղները:

53. Տարածության մեջ հնարավոր է կառուցել չորս զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ուղիղներ:

54. Եթե եռանկյուն բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են նույն անկյունը, ապա բուրգի գագաթը պրոյեկտվում է հիմքին ներգծված շրջանագծի կենտրոնի վրա:

55. Բուրգի ծավալը երեք անգամ փոքր է նրա հետ նույն հիմքը և նույն բարձրությունն ունեցող պրիզմայի ծավալից:

56. Եթե հատվածի ծայրակետերի հեռավորությունները մի ինչ-որ հարթությունից հավասար են 3 և 5, ապա նրա միջնակետի հեռավորությունը նույն հարթությունից հավասար է 4-ի:

57. Եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը նրա հիմքի հարթության հետ կազմում են իրար հավասար անկյուններ, ապա այդ բուրգի հիմքը հանդիսացող բազմանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

58. Ցանկացած a -ի դեպքում $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + az = 0$ հավասարումով տրվում է սֆերա:

59. 1 կողով կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը հավասար է $\frac{\sqrt{2}}{6}$:

60. Կանոնավոր տետրաեդրի երկնիստ անկյան կոսինուսը հավասար է $\frac{1}{4}$:

61. Եթե ուղիղը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց երեք ուղիղների հետ կազմում է α , β , γ անկյուններ, ապա $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$:

62. Գոյություն ունի վեց նիստ ունեցող ոչ ուռուցիկ բազմանիստ:

63. Զառանկյուն բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է 900° :

64. Հարթության վրա մի որևէ անկյան պրոյեկցիան միշտ հանդիսանում է անկյուն, որի մեծությունը փոքր է սկզբնական անկյան մեծությունից:

65. Հարթության վրա մի որևէ անկյան պրոյեկցիան միշտ հանդիսանում է անկյուն, որի մեծությունը փոքր չէ սկզբնական անկյան մեծությունից:

66. Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը դրական թիվ է:

67. Եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են և հավասար են նաև հիմքին առններ բոլոր երկնիստ անկյունները, ապա այդ բուրգը կանոնավոր է:

68. ABCD հիմքով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգին արտագծված գնդի շառավիղը հավասար է ACS եռանկյանն արտագծված շրջանագծի շառավիղին:

69. Եթե կանոնավոր հնգանկյուն բուրգի հիմքի մակերեսը հավասար է 5, իսկ կողմնային նիստի մակերեսը՝ 2, ապա հիմքին առններ երկնիստ անկյունները հավասար են 60° :

70. $2x - 3y + z - 3 = 0$ և $3x + y - 3z + 1 = 0$ հավասարումներով տրվում են երկու փոխուղղահայաց հարթություններ:

71. Եթե եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են, ապա այդ բուրգին արտագծված սֆերայի կենտրոնը գտնվում է նրա հիմքի հարթության վրա:

72. $A(3, -1, 2)$ և $B(-1, 2, 3)$ կետերի հեռավորությունը հավասար է 5-ի:

73. Եթե բուրգի բարձրությունը հավասար է 3-ի, իսկ հիմքին առններ բոլոր երկնիստ անկյունները 60° են, ապա նրա ծավալը 9-ից մեծ է:

74. Քառակուսին, նրա հարթության մեջ չգտնվող, նրա երկու հանդիպակաց կողմերին զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ ուղղի շուրջը պտտելիս ստացվում է գլանի կողմնային մակերևույթ:

75. ABCD հիմքով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը հավասար է ACS եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղին:

76. Գոյություն ունի կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, որի հիմքի մակերեսը փոքր է 5-ից և որին կարելի է ներգծել 1 շառավղով գունդ:

77. Եթե ուռուցիկ քառանիստ անկյան հարթ անկյունները դրանց շրջանցման ուղղությամբ հավասար են 40° , 70° , 80° և 50° , ապա գոյություն ունի այդ անկյան բոլոր նիստերը շոշափող գունդ:

78. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բոլոր կողմնային կողերին առններ երկնիստ անկյունները բութ են:

79. Խորանարդի մի գագաթից մինչև նրա հանդիպակաց գագաթը տանող և խորանարդի մակերևույթով անցնող ճիշտ երկու իրարից տարբեր կարճագույն ճանապարհներ (ուղիներ) կան:

80. Եթե 3-ի հավասար շառավիղներով երեք գնդեր և 1 շառավղով մեկ գունդ զույգ առ զույգ իրար շոշափում են, ապա գոյություն ունի հարթություն, որը շոշափում է այդ չորս գնդերին:

81. Եթե կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի հիմքի կողը հավասար է 2-ի, իսկ կողմնային նիստի մակերեսը 4-ի, ապա նրա ծավալը հավասար է $12\sqrt{3}$:

82. Գոյություն ունի կանոնավոր վեցանկյուն բուրգ, որի կողմնային կողերին առններ երկնիստ անկյունները հավասար են 100° :

83. Եթե եռանկյուն բուրգի մի գագաթից ելնող կողերը հավասար են 1, 2 և 3, ապա նրա ծավալը 1-ից մեծ չէ:

84. Երկու փոխուղղահայաց և խաչվող ուղիղների հեռավորությունը հավասար է 2-ի: Նրանցից մեկի վրա վերցված է 3 երկարությամբ հատված, իսկ մյուսի վրա՝ 6 երկարությամբ հատված: Այդ հատվածների ծայրակետերը գագաթներ ունեցող տետրաէդրի ծավալը հավասար է 6-ի:

85. Եթե 24 ծավալ ունեցող ABCD տետրաէդրի DA, DB և DC կողերի վրա K, L և M կետերը վերցնել այնպես, որ $2DK = DA$, $3DL = DB$, $4DN = DC$, ապա KLDM տետրաէդրի ծավալը հավասար կլինի 1-ի:

86. Եթե բուրգին հնարավոր է ներգծել գունդ, ապա բուրգի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3}Sr$, որտեղ S -ը բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսն է, r -ը՝ ներգծված գնդի շառավիղը:

87. Դիտարկենք $ABCD A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: $ABDA_1$ բուրգի ծավալը երկու անգամ փոքր է A_1DBC_1 բուրգի ծավալից:

88. Եթե $ABCD$ տետրաեդրի ABC և ACD նիստերի մակերեսները իրար հավասար են, ապա AC կողով երկնիստ անկյան կիսորդային հարթությունը կիսում է BD կողը:

89. Դիտարկենք տարածության բոլոր այն կետերը, որոնց հեռավորությունը 1 երկարությամբ հատվածի մի ուրև է կետից 1-ից ավել չէ: Այդ կետերից բաղկացած մարմնի ծավալը հավասար է π :

90. Եթե գլանի և կոնի հիմքերը հավասար են, իսկ կոնի ծնորդը երկու անգամ մեծ է գլանի ծնորդից, ապա նրանց կողմնային մակերևույթների մակերեսը իրար հավասար են:

91. 2 կողմով կանոնավոր եռանկյունը իր կողմերից մեկի շուրջը պտտելուց ստացված մարմնի ծավալը հավասար է 2π :

92. Եթե բազմանիստի բոլոր նիստերը իրար հավասար կանոնավոր բազմանկյուններ են, ապա այդ բազմանիստը կանոնավոր է:

93. Քառանկյան բուրգի հիմքը 4 և 5 կողմերով ուղղանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը հավասար է 3 և անցնում է հիմքի գագաթներից մեկով: Ամենամեծ գունդը, որը հնարավոր է տեղավորել այդ բուրգի մեջ ունի 1 շառավիղը (թույլատրվում է գնդի շոշափումը նիստի հետ):

94. Ցանկացած եռանկյուն բուրգի գոնե մի բարձրությունը հատում է հանդիպակաց նիստը նրա ներքին կետում:

95. Եռանկյուն բուրգի հանդիպակաց կողերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատվում են մի կետում:

96. Եռանկյուն բուրգի բարձրությունները ընդգրկող ուղիղները հատվում են մի կետում:

97. R շառավիղով սֆերայի վրա կարելի է ընտրել A, B և C երեք կետեր այնպես, որ $\angle ACB = \alpha$ և $\frac{AB}{\sin \alpha} > 2R$:

98. Տարածության մեջ չորս գնդեր կարելի է դասավորել այնպես, որ նրանցից ցանկացած երեքը ունեն ընդհանուր կետ, իսկ բոլոր չորսը՝ չունեն ընդհանուր կետ:

99. Ցանկացած եռանկյուն բուրգի համար գոյություն ունի սֆերա, որը շոշափում է նրա բոլոր կողերը:

100. Չորս տարբեր ուղիղներ, որոնցից յուրաքանչյուրը ուղղահայաց է եռանկյուն բուրգի նիստերից մեկին և անցնում է այդ նիստին արտագծված շրջանագծի կենտրոնով, հատվում են մի կետում:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1	նչ	21	այո	41	նչ	61	այո	81	այո
2	այո	22	նչ	42	նչ	62	այո	82	նչ
3	նչ	23	նչ	43	այո	63	նչ	83	այո
4	նչ	24	նչ	44	այո	64	նչ	84	այո
5	նչ	25	այո	45	նչ	65	նչ	85	նչ
6	այո	26	նչ	46	նչ	66	նչ	86	նչ
7	նչ	27	նչ	47	նչ	67	այո	87	այո
8	այո	28	այո	48	այո	68	այո	88	այո
9	այո	29	նչ	49	այո	69	այո	89	նչ
10	նչ	30	նչ	50	այո	70	այո	90	այո
11	նչ	31	այո	51	նչ	71	նչ	91	այո
12	այո	32	այո	52	այո	72	նչ	92	նչ
13	այո	33	նչ	53	նչ	73	այո	93	այո
14	նչ	34	այո	54	նչ	74	նչ	94	նչ
15	այո	35	նչ	55	այո	75	նչ	95	այո
16	այո	36	նչ	56	նչ	76	նչ	96	նչ
17	այո	37	այո	57	այո	77	այո	97	նչ
18	նչ	38	նչ	58	այո	78	այո	98	այո
19	նչ	39	նչ	59	այո	79	նչ	99	նչ
20	այո	40	այո	60	նչ	80	այո	100	այո

ՎԵՐՋԱԲԱՆԻ ՓՈԽԱՐԵՆ

Երկրաչափությունը հնագույն գիտություններից մեկն է, միգուցե ամենահնագույնը, նրա տարիքը հաշվվում է հազարամյակներով: Չնայած դրան, հիմա էլ երկրաչափությունը շարունակում է բուռն զարգանալ: Ընդ որում զարմանալի հայտնագործություններ են արվում երկրաչափության մեծ շինության տառացիորեն բոլոր հարկերում: Երկրաչափությունը հավերժ երիտասարդ գիտություն է: Նրա ինքնատիպությունը դրսևորվում է նաև նրանում, որ երկրաչափության գիտության որոշ ամենաժամանակակից նվաճումները մատչելի ձևով կարելի է բացատրել դպրոցականներին: Պատմենք դրանցից մեկի մասին:

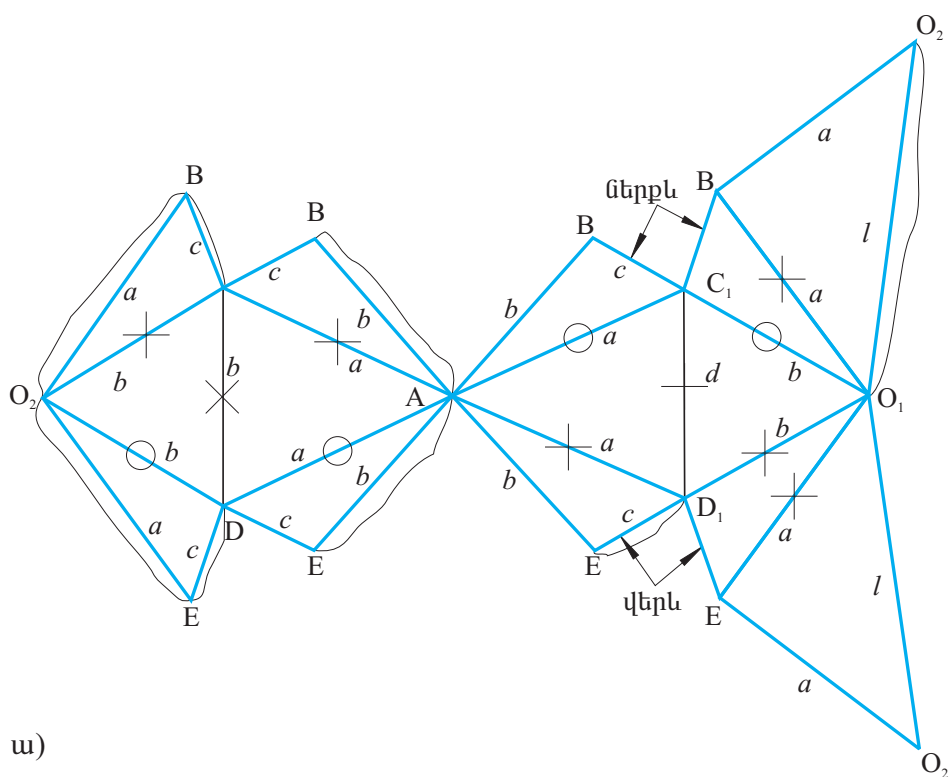
Յուրաքանչյուր ոք, ով զբաղվել է բազմանիստերի փոփոխություններից այդ բազմանիստերը պատրաստելով, նկատած կլինի, որ ստացված մոդելները օժտված են «կոշտությամբ»: Համեմայնդեպս այդ հատկությունը հատուկ է ուռուցիկ բազմանիստերի համար: Սակայն մինչ պարզաբանելը, թե ինչ ենք մենք հասկանում բազմանիստի «կոշտություն» ասելով, մի քանի խոսք հարթ բազմանկյունների մասին:

Միայն մի բազմանկյուն՝ այն է եռանկյունը լիովին որոշվում իր կողմերով: Եթե մենք պատրաստենք բազմանկյուն, որի կողմերը իրար հետ հողակապված պլինդ ձողեր են, ապա ստացված բազմանկյունը (եթե այն եռանկյուն չէ) կոշտ չի լինի, նրա ձևը կարող է փոփոխվել:

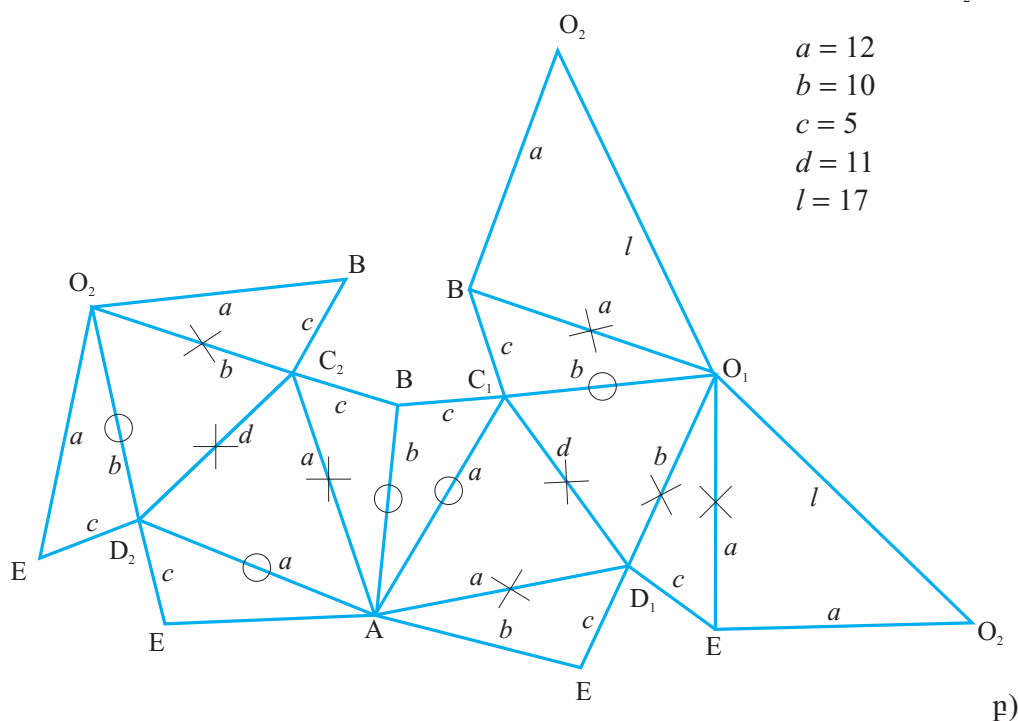
Իսկ ինչպե՞ս է վիճակը բազմանիստերի դեպքում: Լիովին որոշվում է արդյո՞ք բազմանիստը իր բոլոր նիստերով, եթե նաև նշված է, թե ինչպես են այդ նիստերը միմյանց հետ միացված:

Դիտարկենք, օրինակ, օկտաեդրը: Նրա մակերևույթը բաղկացած է ութ կանոնավոր եռանկյուններից: Պատկերացնենք, որ այդ եռանկյունները պատրաստված են բավականին կոշտ նյութից (ստվարաթուղթ, թիթեղ կամ մման մի բան): Սկսենք այդպիսի առանձին եռանկյուններից պատրաստել օկտաեդրի մակերևույթը, միացնելով դրանք իրար ոչ կոշտ ձևով (հողակապերի միջոցով, ժապավենով սոսնձելով կամ մեկ այլ կերպ): Երկու առանձին վերցված եռանկյունների կազմած անկյունը կարող է փոփոխվել, չնայած որ նրանք իրար կպցված են: Եթե մենք այս կերպ պատրաստենք ամբողջ օկտաեդրի մակերևույթը, ապա կստանանք կոշտ կառուցվածք: Դեռ վաղ ժամանակներից գիտնականները նկատել էին, որ կոշտության հատկությամբ օժտված են նրանց հայտնի բոլոր ուռուցիկ (և նույնիսկ ոչ ուռուցիկ) բազմանիստերը: Սակայն պրակտիկ դիտումները իհարկե դեռ թերեմ չեն: Եվ միայն XIX դարի սկզբում ֆրանսիացի մեծ մաթեմատիկոս Օգյուստ Կոշին ապացուցեց թերեմ՝ ցանկացած ուռուցիկ բազմանիստերի կոշտության մասին (մեր նշված իմաստով):

Շատ գիտնականներ ենթադրում էին, որ մման թերեմ ճիշտ է նաև ոչ ուռուցիկ բազմանիստերի համար: Ընդամենը պետք է որոշ ճիգեր գործադրել և ...



ա)



բ)

Նկ.126

Անցավ ևս մեկ ու կես դար և 1977 թվականին, այսինքն երկրաչափության տարիքի տեսանկյունից բոլորովին վերջերս, ամերիկացի մաթեմատիկոս Կոնելլին կառուցեց կոշտ չհանդիսացող ոչ ուռուցիկ բազմանիստ (այն անվանում են «ճկվող»): Այդ բազմանիստը կարող է փոխել իր ձևը, չնայած նրա նիստերը չեն փոփոխվում: Դրանում կարելի է համոզվել՝ պատրաստելով այդպիսի բազմանիստի մոդելը:

Եվ, ինչպես ասում են՝ «դժվարը սկիզբն է»: Կոնելլիից հետո կառուցվեցին ճկվող բազմանիստերի շատ մոդելներ:

126 ա և բ նկարներում պատկերված են միևնույն ճկվող բազմանիստի երկու տարբեր փովածքներ: Նրանցից մեկը ավելի համաչափ է, բայց պահանջում է 9 նիստերի ստանձում: Մյուս դեպքում պետք է ստանձել 8 նիստ: Բոլոր հայտնի ճկվող բազմանիստերի մեջ այն բազմանիստը, որի փովածքը տրված է նկարներում, ունի ամենափոքր թվով նիստեր՝ 14 հատ:

Օգտագործելով ստորև բերված հրահանգը, փորձեք այդ փովածքներով ստանձել բազմանիստը:

1. Նորից նկարեք փովածքը հաստ թղթի վրա (պատճենահան թափանցիկ թղթի օգնությամբ կամ այլ կերպ): Կարող էք նկարում նշված չափերը համեմատական ձևով փոփոխել: Օրինակ, կարելի է վերցնել $a = 12 \cdot 0,5 = 6$ (սմ), $b = 5$ սմ, $c = 2,5$ սմ, $d = 5,5$ սմ, $l = 8,5$ սմ:

2. Փովածքը կտրեք նրա պարագծով: Ընդ որում ստանձվող կողերի յուրաքանչյուր զույգի համար (նրանց ծայրակետերը նշված են նույն տառերով) կողմերից մեկի մոտ մի քիչ շերտ թողեք ստանձման համար:

3. Յուրաքանչյուր հատվածով (ապագա բազմանիստի կողով) մի քանի անգամ դանակի կամ մկրատի բութ եզրով ետ ու առավ շարժեք և մի քանի անգամ ծալեք այս ու այն կողմ: Անհրաժեշտ է, որ յուրաքանչյուր կողին առընթեր երկու նիստերը ազատ «պտտվեն»:

4. Եթե կողը նշված է (+) նշանով, ապա համապատասխան նիստերը պետք է ծալեք թղթի մակերևույթից դեպի ձեզ: Իսկ եթե այն նշված է (0) նշանով, ապա պետք է ծալել թղթի հարթությունից ներքև: Արդյունքում C_2 և D_2 զագաթները պետք է հայտնվեն բազմանիստի «խորքում»:

Ավելի լավ է ինքնուրույն ստանձել մեկ-երկու մոդելներ: Հնարավոր է, պահանջվող բազմանիստը միանգամից չստացվի: Բանը նրանում է, որ յուրաքանչյուր փովածքից կարելի է ստանալ տարբեր բազմանիստեր, այդ թվում նաև չճկվող: Փորձեք առաջարկված փովածքներից ստանձել մի քանի տարբեր մոդելներ: Դա հետաքրքիր է և ուսանելի:

Շուտով հայտնաբերվեց բոլոր ստացված ճկվող բազմանիստերի մի հետաքրքիր հատկություն՝ ճկման պրոցեսում նրանց ծավալը չի փոխվում: Այսպիսով, մաթեմատիկոսների համար ծագեց նոր պրոբլեմ՝ ճիշտ է արդյոք ծավալի հաստատուն մնալու այդ հատկությունը բոլոր ճկվող բազմանիստերի համար: Այս պրոբլեմը անվանվեց «դարբնոցային փուքսի պրոբլեմ»: Որտեղի՞ց այս անվանումը: Եթե գոյություն ունենար ճկվող բազմանիստ, որը ճկման

պրոցեսում փոխեր իր ծավալը, ապա պինդ նյութից պատրաստելով նրա մակերևույթի մոդելը հողերով միացված նիստերով և մակերևույթի որևէ տեղում ոչ մեծ անցք բացելով, մենք կստանայինք դարբնոցային փութսերի նման մի բան՝ ճկման պրոցեսում նշված անցքով օդային հոսանքը կանցներ մերթ ընդ մերթ տարբեր ուղղություններով:

Այս պրոբլեմը փայլուն ձևով լուծեց մոսկվացի մաթեմատիկոս Ի.Խ.Սաբիտովը, որը ապացուցեց, որ ծավալի հաստատուն մնալու հատկությունը ճիշտ է բոլոր ճկվող բազմանիստերի համար: Ապացուցման ընթացքում նա ստացավ բազմանիստի ծավալը արտահայտող բանաձև, որը կարելի է անվանել Հերոնի բանաձևի ընդհանրացում: Ինչ-որ իմաստով ժամանակակից երկրաչափությունը վերադարձավ իր ակունքներին:

Երկրաչափության մեջ ցանկացած լուծված պրոբլեմ ծնում է մի շարք նոր՝ իրենց լուծումը պահանջող պրոբլեմներ: Ի՞նչ կլինի հետագայում, մենք չգիտենք: Գուցե այս պահին մի ալեհեր գիտնական ավարտում է ճկվող բազմանիստերի հատկության վերաբերյալ հերթական զարմանալի թեորեմի ապացույցը: Իսկ հնարավոր է ձեզնից մեկին, որ նոր է ավարտում դպրոցը, կհաջողվի մոտ ապագայում հերթական էջը գրել երկրաչափության փառավոր պատմության մեջ՝ չէ՞ որ երկրաչափությանը բոլոր տարիքներն են հնազանդ:

Մեզ տրված չէ կանխագուշակել ...

Մեզ տրված չէ ...

Հեղինակ

Ա. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Ուղղանկյուն եռանկյուն

1. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը մյուսից երկու անգամ փոքր է: Գտնել եռանկյան պարագիծը, եթե նրա մակերեսը $\sqrt{3}$ է:

2. Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան փոքր անկյունը, եթե ներքնաձիգին տարված միջնագիծը ներքնաձիգի հետ կազմում է 48° անկյուն:

3. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը 10 է, իսկ սուր անկյուններից մեկը 15° : Գտնել եռանկյան մակերեսը:

4. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի վրա գտնվող M կետի հեռավորությունը էջերից 5 և 7 է: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

5. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 50 է, իսկ էջերը հարաբերում են ինչպես 3 : 4: Ինչ երկարությամբ հատվածների կրժանվի ներքնաձիգը նրան տարված բարձրությունով:

6. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին իջեցրած բարձրությունը այն բաժանում է երկու հատվածների, որոնցից մեկը 11-ով մեծ է մյուսից: Եռանկյան էջերը հարաբերում են ինչպես 6 : 5: Գտնել ներքնաձիգը:

7. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը եռանկյան մակերեսը բաժանում է 1 : 4 հարաբերությամբ: Գտնել այդ բարձրությունը, եթե եռանկյան փոքր էջը 5 է:

8. ABC ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 8 և 6 են: M կետը AB ներքնաձիգը բաժանում է 1 : 2 հարաբերությամբ հատվածների (հաշված A գագաթից): Գտնել AMC եռանկյան մակերեսը:

9. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը 12 է, իսկ եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը այդ էջից՝ 2,5: Գտնել եռանկյան ներքնաձիգը:

10. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծված է ուղղանկյուն այնպես, որ նրա մեծ կողմը գտնվում է ներքնաձիգի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները՝ էջերի վրա: Գտնել ուղղանկյան կողմերը, եթե հայտնի է, որ նրանք հարաբերմոս են ինչպես 5 : 2, իսկ եռանկյան ներքնաձիգը 45 է:

11. ABC հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը 54 է: M կետը AC էջը բաժանում է 1 : 3 հարաբերությամբ՝ հաշված A սուր անկյան գագաթից: M կետը BC էջի D կետի հետ միացնող MD հատվածը AC էջի հետ կազմում է 30° -ի անկյուն: Գտնել MD-ն:

⁽¹⁾ Ստորև բերված խնդիրները ընտրված են Ռ.Ա. Ավետիսյանի և Ռ.Ն. Տոնոյանի խնդիրների հավաքածուից:

12. ABC ուղղանկյուն եռանկյան AB ներքնաձիգի վրա ընտրված են K և L կետերն այնպես, որ $AK = KL = LB$, իսկ $CK = \sqrt{2} CL$: Գտնել B անկյունը:

13. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ($\angle C = 90^\circ$) ներսում վերցված է D կետն այնպես, որ ABD, BCD և ACD եռանկյունների մակերեսները հավասար են միմյանց: Գտնել CD-ն, եթե $AD = p$ և $BD = q$:

14. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը 6 է, իսկ նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը այդ էջից՝ 4: Գտնել եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

15. Ուղղանկյուն եռանկյան պարագիծը 15 է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 1: Գտնել եռանկյան ներքնաձիգը:

16. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը 15 է, իսկ մյուս էջի պրոյեկցիան ներքնաձիգի վրա՝ 16: Գտնել այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

17. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 25 է, իսկ էջերից մեկը՝ 20: Գտնել եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը ուղիղ անկյան գագաթից:

18. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը շոշափման կետով ներքնաձիգը տրոհում է 5 և 12 երկարությամբ հատվածների: Գտնել եռանկյան պարագիծը:

19. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 15 և 20 են: Որոշել ներգծած շրջանագծի կենտրոնի և ներքնաձիգին իջեցրած բարձրության հեռավորությունը:

20. Որոշել ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունները, եթե նրան արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը $\sqrt{3} + 1$ է:

21. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 6 և 8 են: Գտնել եռանկյան ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:

22. AB ներքնաձիգ ունեցող ABC ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը 30 է: Գտնել եռանկյան կողմերը, եթե AOB եռանկյան մակերեսը, որտեղ O-ն այդ եռանկյանը ներգծած շրջանի կենտրոնն է, 13 է:

23. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 30 և 40 են: Այդ եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ և միացված են շոշափման կետերը: Գտնել առաջացած եռանկյան մակերեսը:

2. Հավասարասրուն եռանկյուն

1. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 20° է: Գտնել հիմքի որևէ գագաթից տարված բարձրության և կիսորդի կազմած անկյունը:

2. Հավասարասրուն եռանկյան պարագիծը 22 է, իսկ սրունքին տարված միջնագիծը եռանկյունը տրոհում է երկու եռանկյունների, որոնց պարագծերի տարբերությունը 2 է: Գտնել այդ եռանկյան կողմերը:

3. ABC եռանկյան A անկյան կիսորդը հատում է հակադիր կողմը M միջնակետում և $AM = 20$: Գտնել եռանկյան պարագիծը, եթե նրա մակերեսը 420 է:

4. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է AD կիսոր-

դը և ADC և ADB անկյունների տարբերությունը 90° է: Գտնել ABC եռանկյան անկյունները:

5. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և AC սրունքներին տարված բարձրությունները հատվում են O կետում և $\angle BOC = 140^\circ$: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

6. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների վրա վերցված են P և Q կետերն այնպես, որ $BP = PQ = QC$ և $BQ = AC$: Գտնել $\angle B$ -ն:

7. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 7 է: Հիմքի որևէ կետից տարված են սրունքներին զուգահեռ ուղիղներ: Գտնել ստացված զուգահեռագծի պարագիծը:

8. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին իջեցրած բարձրությունը 3 է, իսկ սրունքին տարված բարձրությունը՝ 4,8: Գտնել այդ եռանկյան կողմերը:

9. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը 6 է, իսկ նրա պրոյեկցիան սրունքի վրա՝ 4: Գտնել եռանկյան կողմերը:

10. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքին իջեցրած բարձրությունը 7 է և երկու անգամ մեծ է հիմքի վրա ունեցած իր պրոյեկցիայից: Գտնել եռանկյան հիմքը:

11. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 4 է, սրունքին տարված միջնագիծը՝ 3: Գտնել եռանկյան հիմքը:

12. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 60 է: Հիմքին իջեցված բարձրության միջնակետով տարված է սրունքներից մեկին զուգահեռ ուղիղ: Գտնել այդ ուղղի այն հատվածի երկարությունը, որն ընկած է եռանկյան կողմերի միջև:

13. M -ը ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) BH բարձրության միջնակետն է: AM ուղիղը BC սրունքը հատում է N կետում: Գտնել $AM : MN$ հարաբերությունը:

14. Գտնել հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը, եթե նրա հիմքը 6 է, իսկ հիմքին տարած բարձրությունը հավասար է այդ բարձրության հիմքը և սրունքի միջնակետը միացնող հատվածին:

15. ABC հավասարասրուն եռանկյան B գագաթից տարված է ուղիղ, որն AC հիմքը հատում է D կետում: Գտնել AB սրունքը, եթե $\angle BDC = 60^\circ$, $AD = 3$, $DC = 8$:

16. 24, 15 և 15 կողմերով հավասարասրուն եռանկյան ներսում վերցրած կետերից կողմերին տարված ուղղահայացներով եռանկյունը տրոհվել է երեք հավասարամեծ մասերի: Գտնել այդ ուղղահայացների երկարությունները:

17. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների վրա ընտրված են D և E կետերն այնպես, որ $BD : DA = BE : EC = 3$: Գտնել այդ եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը, եթե $AE \perp CD$:

18. ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի C անկյունը 120° է, իսկ $AB < 4$: D կետն ընտրված է այնպես, որ $AD = BD = \sqrt{7}$ և $CD = 1$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը:

19. Հավասարասրտուն ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան C գագաթը ներքնածիզի E և F կետերին միացնող հատվածները էջերի հետ կազմում են 15° -ի անկյուններ: Որոշել CEF եռանկյան մակերեսը, եթե եռանկյան էջը $24\sqrt{3}$ է:

20. ABC բութանկյուն հավասարասրտուն եռանկյան հիմքը՝ $AC = 32$, իսկ սրունքը 20 է: B գագաթից սրունքին տարված է ուղղահայաց՝ մինչև հիմքի հետ հատվելը: Այդ ուղղահայացն ինչպիսի՞ մասերի է բաժանում հիմքը:

21. Օ կետն ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում ABC հավասարասրտուն եռանկյան բարձրությունը (հաշված գագաթից), եթե եռանկյան երեք կողմերն էլ այդ կետից երևում են միևնույն անկյան տակ ($\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$), իսկ եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը α է:

22. ABC հավասարասրտուն եռանկյան AB սրունքի D միջանկետից նրան տարած ուղղահայացը BC սրունքը հատում է E կետում: Գտնել AC հիմքի երկարությունը, եթե EAC եռանկյան պարագիծը 36 է և $AB : AC = 2 : 1$:

23. Հավասարասրտուն եռանկյան հիմքին առընթեր α անկյան գագաթով տարված ուղիղը հատում է հանդիպակաց սրունքը և հիմքի հետ կազմում β անկյուն: Ի՞նչ հարաբերությամբ է այդ ուղիղը բաժանում եռանկյան մակերեսը (հաշված հիմքից):

24. ABC հավասարասրտուն եռանկյան AB սրունքի N կետից AC հիմքին տարված է NE ուղղահայացը և E կետից BC սրունքին՝ EK ուղղահայացը: Գտնել AC հիմքի երկարությունը, եթե $NE = 10$, $EK = 21$, իսկ NEK եռանկյան մակերեսը 84 է:

3. Հավասարակողմ եռանկյուն

1. Հավասարակողմ եռանկյան ներսում վերցված է M կետ, որը նրա կողմերից գտնվում է b , c , d հեռավորությունների վրա: Գտնել այդ եռանկյան բարձրությունը:

2. ABC հավասարակողմ եռանկյունից դուրս վերցված է D կետն այնպես, որ $BD = AB$: Գտնել $\angle ADC$ -ն:

3. M կետը գտնվում է ABC հավասարակողմ եռանկյան ներսում: Հաշվել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ $AM = BM = 2$, իսկ $CM = 1$:

4. Շեղանկյան երկու կողմերը գտնվում են հավասարակողմ եռանկյան կողմերի վրա, գագաթներից մեկը պատկանում է երրորդ կողմին: Գտնել եռանկյան և շեղանկյան մակերեսների հարաբերությունը:

5. Կանոնավոր եռանկյան կողմը $16\sqrt{3}$ է: Գտնել եռանկյան կենտրոնի հեռավորությունը միջին գծից:

6. Կանոնավոր եռանկյան մակերեսը 24 է: Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են տրված եռանկյան կենտրոնը և երկու կողմերի միջնակետերը:

7. ABC հավասարակողմ եռանկյան A գագաթով BD բարձրության միջնակետով անցնող ուղիղը BC կողմը հատում է M կետում: Գտնել AM-ը, եթե եռանկյան կողմը $3\sqrt{7}$ է:

8. ABC հավասարակողմ եռանկյան ABC անկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle BMC = 30^\circ$ և $\angle BMA = 24^\circ$: Գտնել $\angle BAM$ -ը:

9. Հավասարակողմ եռանկյան գագաթները գտնվում են երեք զուգահեռ ուղիղների վրա, իսկ ներսի ուղղի հեռավորությունը եզրային ուղիղներից $\sqrt{21}$ և $\sqrt{84}$ է: Գտնել եռանկյան կողմը:

10. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB կողմի վրա նշված է F կետն այնպես, որ $AF : FB = 1 : 2$: Գտնել BCF անկյունը:

11. Հավասարակողմ եռանկյունը հատված է ուղղով, որն անցնում է նրա կողմներից մեկի միջնակետով և այդ կողմի հետ կազմում է α սուր անկյուն: Այդ ուղիղն ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում եռանկյան մակերեսը:

12. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB, AC և BC կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են P, Q և R կետերն այնպես, որ $PQ \perp AC$, $QR \perp BC$ և $RP \perp AB$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե PQR եռանկյան մակերեսը P է:

13. Հավասարակողմ եռանկյան կողմի վրա նշված կետը այն բաժանում է $2 : 1$ հարաբերությամբ մասերի: Այդ կետից մյուս երկու կողմերին տարված են ուղղահայացներ: Որոշել ստացված քառանկյան պարագիծը, եթե եռանկյան կողմը $4(3 - \sqrt{3})$ է:

14. Հավասարակողմ եռանկյան կողմերը, սկսած որևէ գագաթից, հաջորդաբար որոշակի ուղղությամբ բաժանված են $1 : 2$ հարաբերությամբ մասերի: Որոշել բաժանման կետերը որպես գագաթներ ունեցող եռանկյան և տրված եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը:

15. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB, BC և AC կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են C_1 , A_1 և B_1 կետերն այնպես, որ $A_1B_1C_1$ եռանկյունը ևս հավասարակողմ է: Գտնել $AB : A_1B_1$ հարաբերությունը, եթե $\angle A_1C_1B = \alpha$:

16. ABC-ն հավասարակողմ եռանկյուն է: AB, BC և CA ճառագայթների վրա համապատասխանաբար նշված են M, P և Q կետերն այնպես, որ $AB : AM = BC : BP = CA : CQ = 1 : 2$: Գտնել ABC և MPQ եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

17. Հատվածի պրոյեկցիաները հավասարակողմ եռանկյան երկու կողմերի վրա 2 և 3 են: Գտնել այդ հատվածի պրոյեկցիան եռանկյան երրորդ կողմի վրա:

18. ABC կանոնավոր եռանկյունը պտտվել է կենտրոնի շուրջը 90° անկյան տակ և բերվել $A_1B_1C_1$ դիրքին: Հաշվել $AA_1BB_1CC_1$ վեցանկյան մակերեսը, եթե եռանկյան կողմը a է:

4. Ընդհանուր առնչություններ եռանկյան մեջ

1. ABC եռանկյան B և C արտաքին անկյունների կիսորդներն ընդգրկող ուղիղները հատվում են O կետում: Գտնել $\angle BOC$ -ն, եթե $\angle A = 40^\circ$:

2. ABC եռանկյան A գագաթից տարված միջնագիծը հավասար է BC կողմի կեսին, իսկ B անկյունը 4 անգամ մեծ է C անկյունից: Գտնել C անկյունը:

3. Եռանկյան միջնագիծը այն տրոհում է երկու հավասարասրուն եռանկյունների: Գտնել այդ եռանկյան մեծ անկյունը:

4. ABC եռանկյան A և C գագաթներից տարված բարձրությունները հատվում են M կետում: Գտնել $\angle AMC$ -ն, եթե $\angle A = 70^\circ$ և $\angle C = 30^\circ$:

5. ABC եռանկյան մեջ $BC = 6$, $AC = 12$ և $\angle A = 30^\circ$: Գտնել եռանկյան մյուս անկյունները և AB կողմը:

6. ABC եռանկյան մեջ $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ և $\angle A = 45^\circ$: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ C գագաթից տարված բարձրությունը փոքր է $\sqrt{2}$ -ից:

7. Եռանկյան բարձրությունները 12, 15 և 20 են: Գտնել նրա մակերեսը:

8. ABC եռանկյան մեջ AB-ին տարված բարձրությունը 6 է, իսկ BC և AC կողմերի պրոյեկցիաները AB ուղղի վրա 12 և 4 են: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ $AB < 10$:

9. ABC եռանկյան մեջ AB կողմը 14 է, մյուս երկու կողմերի գումարը 28, իսկ AB-ին տարված բարձրությունը՝ 12: Գտնել եռանկյան մյուս երկու կողմերը:

10. ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K և M կետերն այնպես, որ $BK = KM = MA$: Գտնել $AK : AB$ հարաբերությունը, եթե $\angle BAC = 30^\circ$:

11. Ուղիղ անկյան ներսում գտնվող կետի հեռավորությունը անկյան կողմերից p և q է ($p \geq q$) Գտնել այդ կետի հեռավորությունն անկյան կիսորդից:

12. 60° անկյան ներսում գտնվող կետի հեռավորությունն անկյան կողմերից 3 և 4 է: Գտնել այդ կետի հեռավորությունն անկյան գագաթից:

13. ABC եռանկյան մակերեսը 45 է: AB, BC, CA կողմերի վրա համապատասխանաբար տրված են M, N, P կետեր այնպես, որ $AM = 2MB$, $BN = 2NC$, $CP = 2PA$: Գտնել MNP եռանկյան մակերեսը:

14. ABC եռանկյան BC և CA կողմերի վրա P և Q կետերը վերցված են այնպես, որ $BP : PC = 2 : 1$ և $CQ : QA = 3 : 2$: Դիցուք O-ն AP և BQ ուղիղների հատման կետն է: Գտնել OPCQ քառանկյան և ABC եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը:

15. ABC եռանկյան AB կողմի վրա նշված է M, BC կողմի վրա P, իսկ AC ճառագայթի վրա Q կետն այնպես, որ $AM : MB = CP : PB = AQ : AC = 2 : 1$: Գտնել ABC և MPQ եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

16. ABC եռանկյան BP միջնագծի O կետն ընտրված է այնպես, որ $BO : OP = 1 : 2$, իսկ Q-ն BC կողմի և AO ուղղի հատման կետն է: Գտնել BOQ և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

17. MB-ն ABC եռանկյան միջնագիծն է: AB, CB և MB ճառագայթների վրա, համապատասխանաբար ընտրված են K, L և N կետերն այնպես, որ $AB : BK = 1 : 3$, $CB : BL = 1 : 5$ և $MB : BN = 1 : 4$: Գտնել KLN եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը 23 է:

18. ABC եռանկյան A անկյունը երկու անգամ մեծ է B անկյունից, իսկ այդ անկյունների դիմացի կողմերը 12 և 8 են: Գտնել երրորդ կողմը:

19. ABC եռանկյան B գագաթից տարած բարձրությունը և միջնագիծը B անկյունը բաժանում են 3 հավասար մասերի: Գտնել եռանկյան անկյունները:

20. ABC եռանկյան B գագաթից տարված բարձրությունը, կիսորդը և միջնագիծը B անկյունը բաժանում են 4 հավասար մասերի: Գտնել եռանկյան անկյունները:

21. ABC եռանկյան մեջ $AB = 14$, $BC = 13$ և $AC = 15$: Գտնել մեծ կողմի միջնակետի հեռավորությունը AB կողմից:

22. ABC եռանկյան BC կողմի վրա ընտրված է P կետն այնպես, որ $PC = 2BP$: Գտնել $\angle ACB$ -ն, եթե $\angle ABC = 45^\circ$ և $\angle APC = 60^\circ$:

23. ABC եռանկյան մեջ B գագաթից տարված բարձրությունը հավասար է մյուս երկու բարձրությունների գումարին, $\angle ABC = \arccos \frac{7}{8}$ և $AC = 2$: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

24. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 45^\circ$ և $\angle C = 30^\circ$: Գտնել BD բարձրությունն և BE միջնագծի կազմած անկյունը:

25. ABC եռանկյան AB կողմը 18 է, նրան տարված բարձրությունը 5 է, իսկ միջնագիծը՝ 13: Գտնել եռանկյան մյուս կողմերը:

5. Նմանության առնչություններ եռանկյան մեջ

1. Եռանկյան կողմին զուգահեռ ուղիղը եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Գտնել տրոհումից ստացված եռանկյան պարագիծը, եթե տված եռանկյան պարագիծը $24\sqrt{2}$ է:

2. Ուղղանկյուն եռանկյան մեծ միջին գծին պատկանող P կետից էջերին տարված զուգահեռ ուղիղները ներքնաձիգը հատում են M և N կետերում: Հաշվել MNP եռանկյան մակերեսը, եթե տրված եռանկյան մակերեսը 40 է:

3. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 17 է, էջը՝ 8: Ներքնաձիգին նրա միջնակետում կանգնեցված է ուղղահայաց, մինչև էջի հետ հատվելը: Գտնել այդ ուղղահայացի երկարությունը:

4. Կանոնավոր եռանկյան կենտրոնից տարված են մի գագաթից դուրս եկող կողմերին զուգահեռ ուղիղներ: Որոշել եռանկյունից անջատված զուգահեռագծի մակերեսը, եթե եռանկյան կողմը $64\sqrt{3}$ է:

5. CD-ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունն է, $AD = 7$ և $DB = 18$: AB-ին ուղղահայաց ուղիղը եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Ի՞նչ հատվածների է բաժանվում այդ ուղղով AB-ն:

6. Եռանկյան մակերեսը 100 է: Եռանկյան յուրաքանչյուր կողմ բաժանված է երեք մասերի՝ $3 : 4 : 3$ հարաբերությամբ: Որոշել այն վեցանկյան մակերեսը, որի գագաթները բաժանման կետերն են:

7. ABC եռանկյան A գագաթից տարված է BC կողմը D կետում հատող ուղիղ այնպես, որ $\angle ADC = \angle BAC$: D կետից տարված է AC կողմին զուգահեռ ուղիղ, որը AB կողմը հատում է E կետում: Գտնել AED եռանկյան կողմերը, եթե $AB = 18$, $BC = 24$, $AC = 12$:

8. ABC հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 70 է: Հիմքին իջեցված BD բարձրության M կետից AB սրունքին տարված է զուգահեռ ուղիղ: Գտնել այդ ուղղի այն հատվածի երկարությունը, որը գտնվում է եռանկյան սրունքների միջև, եթե $BM : MD = 2 : 5$:

9. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած է քառակուսի այնպես, որ նրա մի կողմը ընկած է եռանկյան հիմքի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները պատկանում են սրունքներին: Գտնել քառակուսու կողմը, եթե եռանկյան հիմքը 4 է, բարձրությունը՝ 6:

10. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած ուղղանկյան երկու գագաթները գտնվում են սրունքների, իսկ մյուս երկուսը՝ հիմքերի վրա: Ուղղանկյան անկյունագիծը զուգահեռ է եռանկյան սրունքին: Որոշել ուղղանկյան պարագիծը, եթե եռանկյան հիմքը 3 է, իսկ բարձրությունը՝ 18:

11. Եռանկյանը ներգծված է շեղանկյուն այնպես, որ մի անկյունը նրանց համար ընդհանուր է, իսկ այդ անկյան դիմացի գագաթը եռանկյան կողմը բաժանում է $2 : 3$ հարաբերությամբ: Շեղանկյան անկյունագծերը 6 և 8 են: Գտնել եռանկյան այն կողմերը, որոնք պարունակում են շեղանկյան կողմերը:

12. Եռանկյանը ներգծած է զուգահեռագիծ այնպես, որ նրա կողմերից մեկը ընկած է եռանկյան մեծ կողմի վրա, իսկ անկյունագծերը զուգահեռ են եռանկյան կողմերին: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե եռանկյան կողմերը 45, 39 և 48 են:

13. ABC եռանկյան կողմերից մեկի վրա վերցված կետից տարված են մյուս երկու կողմերին զուգահեռ ուղիղներ: Առաջացած եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները r_1 և r_2 են: Գտնել եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

14. 13, 14 և 15 կողմերով եռանկյունն իր մեծ կողմին տարված ուղղահայացներով բաժանված է երեք հավասարամեծ մասերի: Գտնել այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրի հեռավորությունը եռանկյան մեծ կողմի վրա գտնվող իրեն ամենամոտ գագաթից:

15. ABC եռանկյան մեջ տարված են BD բարձրությունը և D կետից BC կողմին զուգահեռ ուղիղ, որն AB կողմը հատում է E կետում: Գտնել BC կողմը, եթե $BE = 10$, $CD = 15$ և $AE + AD = 15$:

16. Կանոնավոր եռանկյան բոլոր գագաթները գտնվում են ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի վրա: Կանոնավոր եռանկյան կողմերից մեկը զուգահեռ է ներքնաձիգին և երեք անգամ փոքր է նրանից: Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունները:

6. Եռանկյան կիսորդ, միջնագիծ, բարձրություն

1. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ AB սրունքը 10 է և AC հիմքը՝ 12: A և C անկյունների կիսորդները հատվում են D կետում: Գտնել BD-ն:

2. Եռանկյան երկու կողմերը 6 և 12 են, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 120° : Որոշել այդ անկյան կիսորդը:

3. ABC եռանկյան A անկյան կիսորդը 24 է, իսկ այդ անկյունը կազմող կողմերը՝ 45 և 20: Գտնել եռանկյան երրորդ կողմը:

4. ABC եռանկյան BD բարձրությունը 30 է, իսկ AE-ն A անկյան կիսորդն է: Գտնել E կետի հեռավորությունը AC-ից, եթե $AB : AC = 6 : 9$:

5. ABC եռանկյան մեջ $AB = 26$, $BC = 30$ և $AC = 28$: Որոշել եռանկյան այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է B անկյան գագաթից իջեցրած ուղղահայացի և նույն անկյան կիսորդի միջև:

6. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը և անկյան կիսորդը համապատասխանաբար $\sqrt{3}$ և 2 են: Գտնել եռանկյան մեծ սուր անկյունը:

7. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 15 և 2 են, ուղիղ անկյան գագաթից տարված են բարձրությունը և այդ բարձրությունով ու էջերով կազմված անկյունների կիսորդները: Որոշել ներքնաձիգի այն հատվածը, որը գտնվում է կիսորդների միջև:

8. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված կիսորդը ներքնաձիգը բաժանում է 30 և 40 երկարությամբ հատվածների: Գտնել այդ կիսորդի և ներքնաձիգի հատման կետի հեռավորությունը էջերից:

9. ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ CD-ն ուղիղ անկյան կիսորդն է, DM-ը՝ ADC եռանկյան բարձրությունը: Գտնել ABC-ին ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $AD = 40$ և $DM = 24$:

10. ABC ուղղանկյուն եռանկյան B գագաթից C ուղիղ անկյան կիսորդին զուգահեռ տարված ուղիղը AC կողմի շարունակության հետ հատվում է D կետում: Գտնել ABD եռանկյան մակերեսը, եթե $AC = 6$, $CB = 10$:

11. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը՝ $AB = 10$ և $BC = 6$: Տարված են ABC անկյան ե նրան կից անկյան կիսորդները, որոնք AC ճառագայթը հատում են D և E կետերում: Գտնել DE-ն:

12. ABC եռանկյան մեջ $BC : AC : AB = 2 : 4 : 3$, իսկ BD և CE կիսորդները հատվում են O կետում: Որոշել $OD : OB$ հարաբերությունը:

13. BD-ն ABC եռանկյան կիսորդն է: Գտնել AB և BC կողմերը, եթե $\angle ADB = \angle ABC$, $AD = 8$, $CD = 10$:

14. ABC հավասարասրուն եռանկյան A անկյան կիսորդը BD բարձրությունը հատում է O, իսկ BC սրունքը՝ E կետում: Գտնել AC հիմքը, եթե $BO : OD = 4 : 3$ և $EC = 12$:

15. Եռանկյան երկու կողմերը 3 և 7 են: Գտնել երրորդ կողմը, եթե այն հավասար է իրեն տարված կիսորդին:

16. ABC եռանկյան մեջ տարված են BD և AE կիսորդները: Գտնել BDE եռանկյան մակերեսը, եթե $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$:

17. ABC եռանկյան AM և BN կիսորդները հատվում են O կետում: Գտնել եռանկյան անկյունները, եթե $AO = \sqrt{3} MO$ և $NO = (\sqrt{3} - 1)BO$:

18. AD-ն ABC եռանկյան կիսորդ է և $DA = DB$: Գտնել BC-ն, եթե $AC = b$ և $AB = c$:

19. ABC եռանկյան C անկյունը բութ է, BE-ն անկյան կիսորդ է և $AE = 3$, $EC = 2$: Եռանկյան C գագաթի արտաքին անկյան կիսորդը հատվում է BE կիսաառնիկի հետ D կետում: Գտնել E կետի հեռավորությունը AB կողմից, եթե հայտնի է, որ D, E և C կետերով անցնող շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է BC կիսաառնիկի վրա:

20. ABC եռանկյան մեջ BK-ն և CM-ը կիսորդներ են: $BC = 30$, $BM = 10$ և $CK = 15$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը:

21. O կետը ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե $AO = 33$, իսկ AM կիսորդը՝ 60:

22. CD-ն ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) կիսորդ է: BC սրունքի E կետն ընտրված է այնպես, որ $\angle EDC = 90^\circ$: Գտնել EC-ն, եթե $AD = 11$:

23. ABC եռանկյան մեջ BK-ն կիսորդ է, $BC = 2$, $KC = 1$ և $BK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

24. ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) BD և AF կիսորդները հատվում են O կետում: DOA և BOF եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես 3 : 8: Գտնել ($AC : CB$)-ն:

25. Գտնել ABC եռանկյան B և C անկյունների կիսորդների հարաբերությունը, եթե հայտնի է, որ BC և AC կողմերի հարաբերությունը եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավղին համապատասխանաբար 2 և 1,6 է:

26. ABC եռանկյան մեջ $\angle B = 60^\circ$: AD և CE կիսորդները հատվում են O կետում: Գտնել OD-ն, եթե $OE = a$:

27. AM-ը և CN-ը ABC եռանկյան կիսորդներ են: Գտնել $\angle ABC$ -ն, եթե $AC = AN + CM$:

28. Հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը $27\sqrt{3}$ է, սրունքին տարված միջնագիծը հիմքի հետ կազմում է 60° անկյուն: Գտնել այդ միջնագիծը:

29. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 120° է, իսկ սրունքը՝ $44\sqrt{3}$: Որոշել այն եռանկյան մակերեսը, որի կողմերը տրված եռանկյան միջնագծերն են:

30. M -ը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Q -տնել MAB եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը 36 է:

31. Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը S է, սուր անկյուններից մեկը՝ α : Q -տնել եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը ներքնաձիգից:

32. ABC եռանկյան A և B գագաթներից տարված միջնագծերը $6\sqrt{3}$ և 8 են, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 120° : Q -տնել ABC եռանկյան մակերեսը:

33. Եռանկյան երկու միջնագծերը փոխուղղահայաց են և 16 ու 12 են: Q -տնել եռանկյան մակերեսը:

34. BD -ն ABC եռանկյան միջնագիծն է, $\angle CBD = 90^\circ$ և $AB : BD = 4 : \sqrt{3}$: Q -տնել $\angle ABD$ -ն:

35. ABC հավասարասրուն եռանկյան հիմքը՝ $AB = 8$, իսկ AD միջնագիծը ուղղահայաց է BE կիսորդին: Q -տնել այդ եռանկյան մակերեսը:

36. ABC եռանկյան AD միջնագիծը և BE կիսորդը փոխուղղահայաց են և հատվում են F կետում: Q -տնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե DEF եռանկյան մակերեսը S է:

37. ABC եռանկյան BD միջնագծի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ $DM : BM = 1 : 3$: Q -տնել ABC և AMC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

38. ABC եռանկյան AC կողմի վրա նշված են P և Q կետերն այնպես, որ $AP < AQ$ և BP, BQ հատվածներով AM միջնագիծը տրոհվում է երեք հավասար հատվածների: Q -տնել AC -ն, եթե $PQ = 3$:

39. Եռանկյան յուրաքանչյուր միջնագծի վրա վերցված է մի կետ, որը միջնագիծը բաժանում է 3 : 1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Այդ երեք կետերում գագաթներ ունեցող եռանկյան մակերեսը քանի՞ անգամ է փոքր սկզբնական եռանկյան մակերեսից:

40. ABC եռանկյան միջնագծերը հատվում են O կետում: Այդ կետից AC -ին տարած զուգահեռ ուղիղը AB -ն հատում է E կետում, իսկ BC -ին տարած զուգահեռը AC -ն հատում է F կետում: Q -տնել $AEOF$ սեղանի մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը 30 է:

41. AD ուղղով ABC եռանկյան BM միջնագիծը բաժանվում է 5 : 1 հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված B -ից: Γ -ն հարաբերությամբ է բաժանում այդ ուղիղը եռանկյան մակերեսը:

42. AD -ն ABC եռանկյան միջնագիծ է, իսկ M կետը AC կողմի վրա ընտրված է այնպես, որ $AM : MC = 1 : 3$: Q -տնել $BO : OM$ հարաբերությունը, որտեղ O -ն BM և AD հատվածների հատման կետն է:

43. ABC եռանկյան AN և CM միջնագծերը հատվում են 60° անկյան տակ: Q -տնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $AC = a$ և $AN + CM = 3a$:

44. Տրված են ABC եռանկյան AC կողմին առընթեր α և γ սուր անկյունները ($\alpha > \gamma$): B գագաթից տարված են BD միջնագիծը և BE կիսորդը: Գտնել BDE եռանկյան մակերեսի հարաբերությունը ABC եռանկյան մակերեսին:

45. ABC եռանկյան AL և BM միջնագծերը հատվում են K կետում: C գագաթը գտնվում է K , L , M կետերով անցնող շրջանագծի վրա: Գտնել CN միջնագիծը, եթե $AB = a$:

46. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը BM միջնագիծը տրոհում է երեք հավասար մասերի և շոշափում է AC կողմը CM հատվածին պատկանող կետում: Գտնել BA և CA կողմերը, եթե $CB = 10$:

47. ABC եռանկյան AD և BE բարձրությունները հատվում են O կետում, $AD + BE = 35$, $AO = 9$ և $BO = 12$: Գտնել OE -ն և OD -ն:

48. Հավասարասրուն եռանկյան մեջ $AB = BC = 50$ և $AC = 60$: Տարված են AE ու CD բարձրությունները: Գտնել DBE եռանկյան կողմերը:

49. ABC եռանկյան մեջ տարված են BD և CE բարձրությունները: Գտնել ADE և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $\angle A = 45^\circ$:

50. Եռանկյան 6 երկարությամբ բարձրությունը եռանկյան անկյունը բաժանում է $2 : 1$ հարաբերությամբ, իսկ եռանկյան հիմքը՝ այնպիսի մասերի, որոնցից փոքրը 3 է: Որոշել եռանկյան մակերեսը:

51. ABC եռանկյան BC կողմի E կետից AC կողմին տարված EF ուղղահայացը եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Գտնել EF -ը, եթե եռանկյան B գագաթից իջեցրած բարձրությունը AC կողմը հատում է D կետում, $BD = 6$ և $AD : DC = 7 : 18$:

52. ABC եռանկյան մեջ $AB = 14$, $BC = 15$ և $AC = 13$: Գտնել բարձրությունների հատման կետի հեռավորությունը AB կողմից:

53. ABC սուրանկյուն եռանկյան AD բարձրությունը 24 է, CE բարձրությունը՝ 15, իսկ նրանցով կազմած անկյունը՝ 60° : Գտնել AC կողմը:

54. BD -ն և CE -ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Գտնել $\angle A$ -ն, եթե ADE և ABC եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես 3 : 4:

55. Հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը α է, իսկ մակերեսը՝ S : Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթները տրված եռանկյան բարձրությունների հիմքերն են:

56. ABC սուրանկյուն եռանկյան A և C գագաթներից տարված են AP և CQ բարձրությունները: ABC եռանկյան մակերեսը 18 է, BPQ եռանկյան մակերեսը՝ 2, իսկ $PQ = 2\sqrt{2}$: Գտնել ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

57. ABC սուրանկյուն եռանկյան A և C գագաթներից տարված են AD և CE բարձրությունները: Գտնել AC -ն, եթե $BC = a$, $AB = b$ և $DE : AC = k$:

58. AL -ը և CK -ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Գտնել BKL եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը S է, իսկ $\angle B = 60^\circ$:

59. AD-ն և CE-ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Գտնել B, D և E կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = 18$ և $\angle ABC = 60^\circ$:

60. ABC եռանկյան BD բարձրությունը AC կողմը տրոհում է $AD = 9$ և $DC = 16$ երկարությամբ հատվածների: Գտնել AB և BC կողմերը, եթե այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը 12,5 է:

61. ABC սուրանկյուն եռանկյան AD և CE բարձրությունները հատվում են O կետում: Գտնել A, O և C կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = 12$ և $\angle ABC = 30^\circ$:

7. Եռանկյանը արտագծած է շրջանագիծ

1. Սուրանկյուն հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան հիմքին: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

2. Բութանկյուն հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան հիմքին: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

3. Սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների շարունակությունները արտագծած շրջանագիծը տրոհում են երեք աղեղների, որոնց երկարությունները հարաբերում են, ինչպես $2 : 3 : 4$: Գտնել եռանկյան անկյունները:

4. Եռանկյան երկու կողմերը 10 և 12 են, իսկ մակերեսը՝ 48: Գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

5. ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 2 է, $\angle C = 60^\circ$: AC կիսաուղղի վրա D կետն ընտրված է այնպես, որ $\angle ADB = 45^\circ$: Գտնել ABD եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

6. ABC հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած է շրջանագիծ: A գագաթով անցնող տրամագիծը հատում է BC կողմը D կետում: Գտնել BD-ն, եթե $AB = BC = b$ և $\angle ABC = \alpha$:

7. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների կազմած անկյունը α է $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$: BD բարձրության շարունակության վրա M կետը նշված է այնպես, որ MC ուղիղը շոշափում է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը: Գտնել CDM և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

8. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ ($AB = BC$) տարված են AF և CK կիսորդները: Գտնել ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = 6$ և $AK + KF + FC = \frac{90}{11}$:

9. ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքը α է: Հիմքին առընթեր անկյան կիսորդի շարունակությունը հատում է այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը K կետում այնպես, որ $\angle BCK = \alpha$: Գտնել AK-ն:

10. Ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած է շրջանագիծ: Գտնել այդ եռանկյան էջերը, եթե ներքնաձիգի ծայրակետերից մինչև ուղիղ անկյան գագաթով շրջանագծին տարած շոշափողը եղած հեռավորությունները a և b են:

11. Շրջանագծին ներգծած ABC եռանկյան B գագաթից շրջանագծին տարված է շոշափող: A և C գագաթների հեռավորություններն այդ շոշափողից 32 և 8 են: Գտնել եռանկյան B գագաթից տարված բարձրությունը:

12. Եռանկյան մեծ կողմին տարված բարձրությունը և միջնագիծը համապատասխանաբար 30 և 34 են: Գտնել այդ կողմի երկարությունը, եթե եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 65 է:

13. Եռանկյան մի գագաթից տարված բարձրությունը և միջնագիծը տարբեր են և այդ նույն գագաթից ելնող կողմերի հետ կազմում են հավասար անկյուններ: Եռանկյան միջնագիծը m է: Գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

14. ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հիմքերը մեկ այլ եռանկյան գագաթներ են, որի պարագիծը $2p$ է: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե նրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է:

15. Եռանկյան AC և BC կողմերի միջնուղղահայացները հատում են CH բարձրությունը պարունակող ուղիղը P և Q կետերում: Գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $CP = p$ և $CQ = q$:

16. ABC եռանկյան AM և BK միջնագծերի շարունակությունները հատում են եռանկյան արտագծած շրջանագիծը համապատասխանաբար E և F կետերում: Գտնել ABC եռանկյան մեծ և փոքր անկյունները, եթե $AE : AM = 2 : 1$ և $BF : BK = 3 : 2$:

17. AB տրամագծով կիսաշրջանի վրա C կետն ընտրված է այնպես, որ $AC = 5$ և $BC = 12$, E-ն, F-ը և G-ն համապատասխանաբար AC, CB և AB աղեղների միջնակետերն են: Գտնել EFG եռանկյան մակերեսը:

18. ABC կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի BC փոքր աղեղի վրա վերցված է M կետն այնպես, որ $MB = 3$, $MC = 1$: Գտնել AM-ը:

19. ABC սուրանկյուն եռանկյան AM և CN բարձրությունների շարունակությունները հատում են եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը P և Q կետերում:

Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = a$ և $QP = \frac{6}{5}a$:

20. ABC եռանկյան AD միջնագծի շարունակությունը հատում է եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը E կետում: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$ և $AE = 6$:

21. ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծին B կետում տարված շոշափողը հատվում է CA կիսաուղղի հետ D կետում: Գտնել ABC եռանկյան պարագիծը, եթե $AB + AD = AC$, $CD = 3$ և $\angle BAC = 60^\circ$:

8. Եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ

1. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 120° է: Գտնել այդ եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:

2. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը h է, իսկ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r : Գտնել եռանկյան պարագիծը:

3. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը հիմքին տարած բարձրությունը բաժանում է $5 : 13$ հարաբերությամբ մասերի (հաշված գագաթից): Գտնել եռանկյան բարձրությունը, եթե նրա սրունքը 13 է:

4. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 60^\circ$ և $BC = 30$: Գտնել O , B և C կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, որտեղ O -ն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:

5. ABC եռանկյան A անկյան կիսորդը արտագծած շրջանագիծը հատում է D կետում: Գտնել DC -ն, եթե այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը D կետից a է:

6. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը BC կողմը շոշափում է T կետում, նրա կենտրոնը O -ն է, իսկ շառավիղը՝ 3 : Գտնել BC կողմը, եթե $\angle A = 30^\circ$, իսկ $\angle BOT : \angle COT = 3 : 4$:

7. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը շոշափման կետով BC կողմը տրոհում է 2 և 3 երկարությամբ հատվածների: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե $\angle BAC = 60^\circ$:

8. Եռանկյան մի կողմը 17 է, իսկ նրա պրոյեկցիան մեծ կողմի վրա՝ 8 : Գտնել այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե արտագծած շրջանագծի շառավիղը $\frac{85}{6}$ է:

9. Եռանկյան կողմերից մեկը 44 է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ $5,5$: Գտնել այդ եռանկյան արտագծած շրջանագծի տրամագիծը, եթե եռանկյան մակերեսը 264 է:

10. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը AB կողմը շոշափում է D , իսկ BC կողմը՝ F կետում: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $BF = 8$, $DF = 9,6$, $AC = 26$:

11. ABC եռանկյանը ներգծած O կենտրոնով շրջանագիծը շոշափում է BC կողմը K կետում: Գտնել BOK եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան պարագիծը $2p$ է, $AC = b$, իսկ $\angle ABC = \alpha$:

12. ABC եռանկյան մեջ $AB = 4$, $AC = 5$ և $BC = 6$: Այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանում B անկյան կիսորդը (հաշված B գագաթից):

13. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 60^\circ$: AD կիսորդը ներգծած շրջանագծի O կենտրոնով բաժանվում է $OP : AO = 1 : \sqrt{3}$ հարաբերությամբ: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

14. ABC եռանկյան մեջ $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$, O-ն ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Գտնել O, B և C կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը:

15. ABC հավասարասրուն եռանկյանը ներգծված շրջանագծի շոշափողը, որը զուգահեռ է AC հիմքին, AB սրունքը հատում է D կետում, իսկ BC-ն՝ E կետում: Գտնել DE հատվածի երկարությունը, եթե $AD = 15$, $DB = 30$:

16. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնով տարված է հիմքին զուգահեռ ուղիղ: Սրունքների միջև ընկած այդ ուղղի հատվածի երկարությունը 20 է: Գտնել եռանկյան կողմերը, եթե նրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը 8 է:

17. ABC եռանկյանը ներգծված է շրջանագիծ: Շրջանագծի շոշափողի այն հատվածը, որի զուգահեռ է AB-ին և գտնվում է եռանկյան կողմերի միջև, 2,5 է: Գտնել AB-ն, եթե եռանկյան պարագիծը 20 է:

18. Եռանկյանը ներգծված է շրջանագիծ, որի կենտրոնը եռանկյան գագաթներին միացնող հատվածները եռանկյունը բաժանում են 4, 13 և 15 մակերեսներով մասերի: Գտնել եռանկյան կողմերը:

19. ABC հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան ($AC = BC$) արտագծած շրջանագծի կենտրոնը O-ն է: Հայտնի է, որ ABO եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$ անգամ մեծ է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղից: Գտնել $\angle ACB$ -ն:

20. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծին տարված է հիմքին իջեցրած բարձրությանը զուգահեռ շոշափող: Որոշել առաջացած ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը, եթե տված եռանկյան հիմքը 12 է, իսկ սրունքը՝ 10:

21. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան C գագաթից տարված է CE միջնագիծը: Գտնել AEC և CEB եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը, եթե $AC : CB = 3 : 4$:

22. ABC սուրանկյուն հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) մեջ AD-ն բարձրությունն է, O-ն ABD եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը: Գտնել AB-ն, եթե $CD = p$ և $AO = q$:

23. ABC եռանկյան մեջ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$ և AD-ն A անկյան կիսորդն է: Գտնել ADB և ADC եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:

24. ABC սուրանկյուն հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) մեջ AD-ն բարձրությունն է, ABD և ADC եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար 6 և 12 են: Գտնել եռանկյան սրունքը:

25. Եռանկյանը ներգծած շրջանագծին տարված են այդ եռանկյան կողմերին զուգահեռ շոշափողներ, որոնք եռանկյունից կտրում են երեք փոքր եռանկյուններ: Հայտնի են այդ եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները՝ r_1 , r_2 և r_3 : Գտնել տրված եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

9. Խառը խնդիրներ

1. ABC եռանկյան AD միջնագիծը CE բարձրության հետ հատվում է O կետում: Գտնել BC կողմը, եթե $AB = 8$, $OE = 1$, իսկ ABC եռանկյան մակերեսը՝ 12:

2. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 9 և 12 են: Գտնել նրա կիսորդների հատման կետի և միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը:

3. ABC եռանկյան AC կողմի վրա M կետն ընտրված է այնպես, որ $AM : MC = 7 : 4$: Գտնել $AO : OD$ հարաբերությունը, որտեղ O-ն AD միջնագծի և BM հատվածի հատման կետն է:

4. ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) AF բարձրությունը հատվում է BD բարձրության հետ O կետում, ընդ որում $BO : OD = n$, իսկ AE անկյան կիսորդը BD բարձրության հետ հատվում է K կետում: Գտնել $(BK : KD)$ -ն:

5. ABC եռանկյան BD բարձրության D հիմքից տարված AB կողմին զուգահեռ ուղիղը BC կողմի հետ հատվում է K կետում: Գտնել $(BK : KC)$ -ն, եթե BDK եռանկյան մակերեսը ABC եռանկյան մակերեսի $\frac{3}{16}$ մասն է:

6. BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի A անկյունը 100° է: Եռանկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle MAB = 20^\circ$ և $\angle MBA = 10^\circ$: Գտնել $\angle AMC$:

7. BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի A անկյունը 20° է: Եռանկյան AB և AC սրունքների վրա համապատասխանաբար վերցված են M և N կետերն այնպես, որ $\angle NBC = 60^\circ$ և $\angle MCB = 50^\circ$: Գտնել $\angle MNB$:

8. ABC եռանկյան մեջ CM միջնագիծը հավասար է A գագաթից տարված բարձրությանը և 1 է, իսկ B գագաթից տարված բարձրությունը $\sqrt{3}$ է: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե $\angle C < 120^\circ$:

9. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների վրա վերցված են P և Q կետերն այնպես, որ $BP = PQ = QC = AC$: Գտնել $\angle B$ -ն:

10. ABC եռանկյան BH բարձրության հիմքից AB և BC կողմերին տարված են ուղղահայցներ, որոնք այդ կողմերը համապատասխանաբար տրոհել են 1 : 2 և 2 : 1 հարաբերությամբ հատվածների (հաշված B գագաթից): Գտնել ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $BH = 2\sqrt{2}$:

11. ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա, համապատասխանաբար, ընտրված են K և M կետերն այնպես, որ $AK : KB = 3 : 2$ և $AM : MC = 4 : 5$: K կետով անցնող և BC կողմին զուգահեռ ուղիղը BM ուղղի հետ հատվում է O կետում: Գտնել $BO : OM$ հարաբերությունը:

12. ABC եռանկյան AB, BC և AC կողմերի վրա, համապատասխանաբար, ընտրված են K, M և N կետերն այնպես, որ $AK : KB = BM : MC = CN : NA = p : q$, իսկ O-ն KM և BN հատվածների հատման կետն է: Գտնել $KO : OM$ հարաբերությունը:

13. ABC եռանկյան ներսում վերցված է O կետն այնպես, որ AOB, BOC և AOC եռանկյունների մակերեսները միմյանց հավասար են: O կետով տարված է ուղիղ, որը հատում է AC և AB կողմերը, իսկ B և C կետերի հեռավորություններն այդ ուղղից համապատասխանաբար p և q են: Գտնել A կետի հեռավորությունն այդ ուղղից:

14. ABC եռանկյան AD բարձրությունը, BE միջնագիծը և CF կիսորդը հատվում են O կետում: Գտնել $\angle ACB$ -ն, եթե $OE = 2OC$:

15. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB, AC և BC կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են P, Q և R կետերն այնպես, որ $AQ = QC$ և $\angle PQR = 60^\circ$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե PQR եռանկյան մակերեսը p է:

16. ABC եռանկյան մեջ $\angle C = 120^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}$: AB կողմի վրա, եռանկյունից դուրս, կառուցված է հավասարակողմ եռանկյուն: Գտնել նրա կենտրոնի հեռավորությունը C կետից:

17. ABC եռանկյան AB, BC և CA կողմերի վրա, համապատասխանաբար, ընտրված են C_1 , A_1 , և B_1 , կետերն այնպես, որ A_1C_1B , A_1B_1C և B_1C_1A եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները միմյանց հավասար են և r են: Գտնել ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $A_1B_1C_1$ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը r_1 է:

Բ. ԶԱՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Չուգահեռագիծ

1. ABCD զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետով անցնող ուղիղը BC կողմը հատում է E, իսկ AD կողմը F կետում: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե նրա պարագիծը 20 է $BE = 4$ և $AF = 2,5$:

2. Չուգահեռագծի մի կողմը 4,5 է, իսկ անկյունագծերը կազմում են 90° անկյուն: Գտնել նրա պարագիծը:

3. Չուգահեռագծի բարձրությունները հարաբերում են, ինչպես 3 : 4, իսկ փոքր կողմը 12 է: Գտնել զուգահեռագծի պարագիծը:

4. Չուգահեռագծի մակերեսը 24 է, իսկ անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը կողմերից՝ 2 և 3: Գտնել զուգահեռագծի պարագիծը:

5. ABCD զուգահեռագծի AC անկյունագիծը $4\sqrt{2}$ է և AB կողմի հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե DB անկյունագիծն ուղղահայաց է AB կողմին:

6. ABCD զուգահեռագծի A անկյան կիսորդը BC կողմը հատում է K կետում: Գտնել այդ զուգահեռագծի պարագիծը, եթե $BK = 15$, $KC = 9$:

7. ABCD զուգահեռագծի պարագիծը 100 է, $\angle C = 30^\circ$, իսկ անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը CD-ից՝ 6,5: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը:

8. Չուգահեռագծի անկյունագծերը 17 և 19 են, իսկ կողմերը հարաբերում են, ինչպես 2 : 3: Գտնել կողմերը:

9. M-ը ABCD զուգահեռագծի AB կողմի միջնակետն է, O-ն AC անկյունագծի և DM հատվածի հատման կետը: Գտնել AOD և AMO եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

10. Չուգահեռագծի անկյունագծի ը 14 է, բարձրությունները 13 և 11: Գտնել նրա մակերեսը:

11. ABCD զուգահեռագծում $\angle A = \alpha$, իսկ B գագաթից AD-ին իջեցրած ուղղահայացը AC անկյունագծի ը բաժանում է p : q հարաբերությամբ մասերի (հաշված A գագաթից): Գտնել (AB : AD)-ն:

12. ABCD զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետից BC կողմին տարված ուղղահայացը BC-ն հատում է E, իսկ BA ճառագայթը F կետերում: Գտնել BE-ն, եթե AB = 2, BC = 6 և BF = 4:

13. Չուգահեռագծի կողմերը 6 և 10 են: Մեծ կողմին առընթեր անկյունների կիսորդները դիմացի կողմը բաժանում են երեք հատվածների: Որոշել այդ հատվածներից յուրաքանչյուրի երկարությունը:

14. ABCD զուգահեռագծի A անկյան կիսորդը CD կողմը հատում է M կետում և DM = MC: Գտնել $\angle A$ -ն, եթե հայտնի է, որ CAM անկյան տանգենսը $\frac{1}{3}$ է:

15. ABCD զուգահեռագծի C գագաթից տարված ուղիղը հատել է AB և AD ճառագայթները M և N կետերում: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե AMN եռանկյան մակերեսը 75 է և MC : CN = 2 : 3:

16. ABCD զուգահեռագծի AC անկյունագծի ը P և Q կետերով բաժանված է երեք հավասար մասերի: M-ը և N-ը DP և DQ ճառագայթների և AB-ն պարունակող ուղղի հատման կետերն են: Գտնել (AB : MN)-ը:

17. M-ը ABCD զուգահեռագծի AB կողմի միջնակետն է: Հայտնի է, որ C անկյան կիսորդը AMD եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Գտնել AD-ն, եթե CD = 4:

18. ABCD զուգահեռագծի վրա նշված են AB, BC, CD և AD կողմերի միջնակետերը M, N, P, Q: Գտնել AN, BP, CQ և DM հատվածներով պարփակված պատկերի մակերեսը, եթե զուգահեռագծի մակերեսը 20 է:

19. Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե նրա մեծ անկյունագծի ը 14 է, իսկ փոքր անկյունագծի ը սուր անկյան գագաթից նրա վրա իջեցրած ուղղահայացով բաժանվում է 2 և 6 երկարությամբ հատվածների:

20. ABCD զուգահեռագծի AB և BC կողմերի վրա վերցված են համապատասխանաբար K և M կետերն այնպես, որ A : KB = 1 : 3 և BM : MC = 2 : 5: Գտնել KBM և KDM եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

21. ABCD զուգահեռագծի AC անկյունագծի վրա E կետը վերցված է այնպես, որ $AE : AC = 1 : 3$, իսկ AD կողմի վրա F կետն այնպես, որ $AF : AD = \frac{1}{4}$: G-ն EF և BC ուղիղների հատման կետն է: Գտնել ABCD զուգահեռագծի մակերեսը, եթե ABGE քառանկյան մակերեսը 8 է:

22. ABCD զուգահեռագծի անկյունների կիսորդների հատումից առաջացած քառանկյան զագաթներից մեկը զուգահեռագծի կողմի վրա է: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե ABCD զուգահեռագծի մակերեսը 36 է:

23. ABCD զուգահեռագծի կողմերը 6 և 4 են: Գտնել զուգահեռագծի անկյունների կիսորդների հատումից առաջացած պատկերի մակերեսը, եթե A զագաթից մինչև B և D անկյունների կիսորդները եղած հեռավորությունների գումարը 6 է:

24. ABCD զուգահեռագծի A սուր անկյունը 2α է: A անկյան կիսորդը BC կողմը հատում է F կետում, իսկ K-ն AF և DC ուղիղների հատման կետն է: D կետից AK ուղիղն տարված DP ուղղահայացի երկարությունը 1 է: Գտնել ABCD զուգահեռագծի մակերեսը, եթե KFC եռանկյան և AFCD քառանկյան մակերեսները հարաբերում են ինչպես 1 : 15:

25. Տրված է ABCD զուգահեռագիծը: E-ն և K-ն համապատասխանաբար AB և BC կողմերի միջնակետերն են, իսկ N-ը՝ AK և ED ուղիղների հատման կետը: Գտնել AEN եռանկյան և ABCD զուգահեռագծի մակերեսների հարաբերությունը:

26. ABCD զուգահեռագծի AB և CD կողմերի վրա վերցված են M և N կետերն այնպես, որ $AM : MB = 2 : 1$ և $CN : ND = 3 : 1$: Գտնել AO : OC հարաբերությունը, որտեղ O կետը MN ուղիղի և AC անկյունագծի հատման կետն է:

27. ABCD զուգահեռագծում $AB = 2$ և $\angle A = 45^\circ$: BD անկյունագծի վրա վերցված են E և F կետերն այնպես, որ $\angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ $2BF = 3BE$:

28. ABCD զուգահեռագծում K-ն BC, իսկ M-ը CD կողմերի միջնակետերն են: Գտնել AD-ն եթե $AK = 6$, $AM = 3$ և $\angle KAM = 60^\circ$:

29. ABCD զուգահեռագծի A զագաթով անցնող ուղիղը հատում է BD անկյունագիծը, BC կողմը և CD կողմի շարունակությունը համապատասխանաբար E, F և K կետերում: Գտնել EF-ը, եթե $AE = 2$ և $EK = 3$:

30. ABCD զուգահեռագծի մեջ M-ը և N-ը համապատասխանաբար AD և CD կողմերի միջնակետն են: Որոշել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $AC = 28$, $BM = 15$ և $BN = 13$:

31. ABCD զուգահեռագծի B բութ անկյան զագաթից տարված են BM և BN բարձրությունները: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $BM = 15$, $BN = 14$ և $MN = 13$:

2. Ուղղանկյուն

1. ABCD ուղղանկյան AB կողմի վրա վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle CMD = 60^\circ$: Գտնել AM-ը և BM-ը, եթե $AB = 12$ և $BC = 6\sqrt{3}$:

2. ABCD ուղղանկյան մեջ $AB = 20$, $BC = 15$, A և B գագաթներից համապատասխանաբար տրված են BD և AC անկյունագծերին ուղղահայացներ: Որոշել այդ ուղղահայացների հիմքերի հեռավորությունը:

3. ABCD ուղղանկյան DC կողմի վրա ընտրված են E և F կետերն այնպես, որ $3EF = DC$ իսկ AF և BE հատվածները հատվում են M կետում: AMB եռանկյան մակերեսը 18 է: Գտնել ABCD ուղղանկյան մակերեսը:

4. ABCD ուղղանկյան DC կողմի վրա ընտրված են E և F կետերն այնպես, որ $DE : EF : FC = 1 : 2 : 1$ իսկ AE և BF ուղիղները հատվում են M կետում: Գտնել ABCD ուղղանկյան մակերեսը եթե AMB եռանկյան մակերեսը 28 է:

5. 24 և 32 կողմերով ուղղանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն (յուրաքանչյուր կողմի վրա մեկ գագաթ ունեցող), որի կողմերը հարաբերում են, ինչպես 1 : 3: Գտնել այդ ուղղանկյան կողմերը:

6. ABCD ուղղանկյան D և C գագաթների հեռավորությունները A գագաթով անցնող և BC կողմը հատող ուղղից համապատասխանաբար p և q են: Գտնել B գագաթի հեռավորությունը այդ ուղղից:

7. ABCD ուղղանկյան A, D և C գագաթների հեռավորությունները AD և DC կողմերը հատող ուղղից, համապատասխանաբար p_1 , p_2 և p_3 են: Գտնել B գագաթի հեռավորությունն այդ ուղղից:

8. Ուղղանկյան AB, BC, CD և DA կողմերի վրան համապատասխանաբար վերցված են M, N, P և Q կետերն այնպես, որ MNPQ-ն ուղղանկյուն է և $AM : MB = 1 : 3$, $BN : NC = 3 : 4$: ABCD ուղղանկյան պարագիծը 60 է: Գտնել նրա կողմերը:

9. ABCD ուղղանկյան AC և BD անկյունագծերը հատվում են O կետում: Օ' կետը O կետի համաչափն է BC ուղղի նկատմամբ, իսկ $\angle AOD = 2\angle AO'D$: Ուղղանկյան փոքր կողմը 6 է: Գտնել ուղղանկյան մակերեսը:

10. ABCD ուղղանկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $MA = 9$, $MB = 6$, $MC = \sqrt{19}$: Գտնել MD-ն:

11. ABCD ուղղանկյան B գագաթից AC անկյունագծին տարված է BM ուղղահայացը: P-ն AM հատվածի, իսկ Q-ն CD կողմի միջնակետն է: Գտնել $\angle BPQ$ -ն:

12. ABCD ուղղանկյան AC անկյունագծի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ $AM : MC = p : q$: Գտնել $(MB : MD)$ -ն, եթե $AB : BC = q : p$:

3. Շեղանկյուն

1. Գտնել շեղանկյան մակերեսը, եթե նրան ներգծած շրջանագիծը կողմերից մեկը տրոհում է 1 և 4 երկարությամբ հատվածների:

2. Շեղանկյան սուր անկյունը 60° է, իսկ կողմերի միջնակետերը հաջորդաբար միացնելուց ստացված քառանկյան մակերեսը՝ $25\sqrt{3}$: Գտնել շեղանկյան կողմերը:

3. Շեղանկյան երկու կից կողմերի միջնակետերը և այդ կողմին չափատկանող գագաթը միացված են իրար: Որոշել ստացված եռանկյան մակերեսը, եթե շեղանկյան անկյունագծերը 6 և 8 են:

4. ABCD շեղանկյան կողմը 6 է, իսկ $\angle BAD = 60^\circ$: BC կողմի վրա E կետը վերցված է այնպես, որ CE = 2: Գտնել E կետի հեռավորությունը շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետից:

5. Շեղանկյան սուր անկյունը α է, իսկ կողմը՝ a : Սուր անկյան գագաթով անցնող ուղիղը շեղանկյան մակերեսը տրոհում է 1 : 3 հարաբերությամբ մասերի: Գտնել այդ ուղղի շեղանկյան ներսում գտնվող հատվածի երկարությունը:

6. Շեղանկյան անկյունագծերի պրոյեկցիաները կողմերից մեկը պարունակող ուղղի վրա 8 և 2 են: Գտնել շեղանկյան մակերեսը:

7. ABCD շեղանկյան անկյունագծերը 3 և 4 են: B բութ անկյան գագաթից տարված են BE և BF բարձրությունները: Գտնել BEDF քառանկյան մակերեսը:

8. Շեղանկյան բութ անկյան գագաթից կողմերից մեկին իջեցրած ուղղահայացը մեծ անկյունագիծը բաժանում է 3,5 և 12,5 երկարությամբ հատվածների: Գտնել շեղանկյան կողմը և փոքր անկյունագիծը:

9. Շեղանկյան բարձրությունը a է, իսկ բութ անկյան գագաթից տարված բարձրությունների հիմքերի հեռավորությունը՝ b : Գտնել շեղանկյան մակերեսը:

10. Գտնել շեղանկյան սուր անկյունը, եթե նրա կողմի միջնակետից հանդիպակաց կողմը երևում է $\alpha = \arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$ անկյան տակ:

11. Գտնել շեղանկյան սուր անկյունը, եթե նրա գագաթով անցնող և անկյունը 1 : 3 հարաբերությամբ բաժանող ուղիղը դիմացի կողմը բաժանում է 1 : $\sqrt{3}$ հարաբերությամբ մասերի:

12. ABCD շեղանկյան A գագաթով անցնող ուղիղը CB և CD կիսաուղիղների հետ հատվում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել շեղանկյան կողմը, եթե CM = p և CN = q:

13. Ջուզահեռագծին ներգծած է շեղանկյուն այնպես, որ շեղանկյան կողմերը զուգահեռ են զուգահեռագծի անկյունագծերին: Գտնել շեղանկյան կողմը, եթե զուգահեռագծի անկյունագծերը 12 և 6 են:

14. $44\sqrt{3}$ երկարությամբ կողմ և 60° սուր անկյուն ունեցող շեղանկյանը ներգծված է շրջանագիծ: Որոշել այն քառանկյան մակերեսը, որի համար գագաթներ են ծառայում շեղանկյան կողմերի հետ շրջանագծի շոշափման կետերը:

15. Գտնել շեղանկյան սուր անկյունը, եթե նրան ներգծած շրջանագիծը անկյունագծերից մեկը տրոհում է հատվածների, որոնք հարաբերում են, ինչպես 1 : 2 : 1:

16. ABCD շեղանկյանը և նրա մեծ անկյունագիծը պարունակող ABC եռանկյանը ներգծված են շրջանագծեր: Գտնել նրանց շառավիղների հարաբերությունը, եթե շեղանկյան սուր անկյունը α է:

17. Գտնել ABCD շեղանկյան մակերեսը, եթե հայտնի են ABC և ABD եռանկյունների արտագծած շրջանագծերի շառավիղները՝ R և r :

4. Քառակուսի

1. ABCD քառակուսու կողմը 40 է: CD կողմի վրա վերցված է K կետն այնպես, որ $CK : KD = 1 : 3$: Գտնել C կետի հեռավորությունը AK ուղղից:

2. $AC = 3$ և $BC = 2$ էջերով ուղղանկյուն եռանկյունը ներգծված է քառակուսուն: Հայտնի է, որ A գագաթը համընկնում է քառակուսու գագաթներից մեկի հետ, իսկ B-ն և C-ն գտնվում են քառակուսու այն կողմերի վրա, որոնք չեն պարունակում A-ն: Գտնել քառակուսու մակերեսը:

3. ABCD քառակուսու A գագաթով անցնող և AC անկյունագծին ուղղահայաց ուղիղը CB և CD ճառագայթները հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել MN-ը, եթե քառակուսու կողմը a է:

4. ABCD քառակուսու AB կողմի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ $AM : MB = 2 : 3$: Քառակուսու կենտրոնի հեռավորությունը M կետից $\sqrt{26}$ է: Գտնել քառակուսու կողմը:

5. M կետը ABCD քառակուսու BC կողմը բաժանում է $BM : MC = (\sqrt{3} - 1) : (2 - \sqrt{3})$ հարաբերությամբ մասերի, իսկ O-ն AC և MD ուղիղների հատման կետն է: Գտնել $\angle MOC$ -ն:

6. ABCD քառակուսու կողմը 2 է: AB, BC, CD և DA ճառագայթների վրա ընտրված են, համապատասխանաբար, քառակուսուց դուրս B_1, C_1, D_1 և A_1 կետերն այնպես, որ $BB_1 = CC_1 = DD_1 = AA_1 = p$: p -ի ո՞ր արժեքի դեպքում $A_1B_1C_1D_1$ քառանկյան մակերեսը կլինի քառակուսու մակերեսի կրկնապատիկը:

7. ABCD քառակուսու ներսում ընտրված է M կետն այնպես, որ $MA = 13$, $MB = 15$, իսկ $AB = 14$: Գտնել MCD եռանկյան մակերեսը:

8. ABCD քառակուսու BC և CD կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ $BM = MC$ և $CN : ND = 2 : 1$: Գտնել $\angle MAN$ -ը:

9. ABCD քառակուսու AC անկյունագծի վրա ընտրված է P կետն այնպես, որ $AP : PC = 3 : 1$, իսկ Q-ն AB կողմի միջնակետն է: Գտնել $\angle DPQ$ -ն:

10. ABCD քառակուսու AB և CD կողմերի վրա համապատասխանաբար վերցված են M և N կետերն այնպես, որ $AM : MB = 1 : 2$ և $CN = ND$: P և Q կետերը համապատասխանաբար AC անկյունագծի և MD և BN հատվածների հատման կետերն են: Գտնել CQN եռանկյան պարագիծը, եթե AMP եռանկյան պարագիծը 12 է:

11. ABCD քառակուսու կողմը 36 է: M-ը և N-ը համապատասխանաբար AD և CD կողմերի միջնակետերն են: Գտնել BMN եռանկյան B անկյան կիսորդը:

12. ABCD քառակուսու AD և CD կողմերի վրա ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ $MD = CN$, իսկ AM և BN ուղիղները հատվում են E կետում: Գտնել ME-ն, եթե $AB = 3$ և $NE = 4$:

13. ABCD քառակուսու AB, BC, CD և DA կողմերի վրա համապատասխանաբար վերցված են A_1, B_1, C_1 և D_1 , կետերն այնպես, որ $A_1B_1C_1D_1$ -ը քառակուսի է: Գտնել ABCD և $A_1B_1C_1D_1$ քառակուսիների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $B_1A_1B = 60^\circ$:

14. ABCD քառակուսու CD կողմի վրա նշված է M կետը և $AM = a$: BAM անկյան կիսորդը BC կողմը հատում է N կետում: Գտնել $(BN + DM)$ -ը:

15. ABCD քառակուսու ներսում վերցված է P կետն այնպես, որ $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$: Գտնել $\angle APB$ -ն:

16. ABCD քառակուսու A գագաթով անցնող ուղիղը AB-ի հետ կազմում է $\alpha < 45^\circ$ անկյուն: B և D կետերից այդ ուղիին տարված են ուղահայաց, իսկ C կետից՝ զուգահեռ ուղիղներ: Գտնել այդ ուղիղներով պարփակված քառանկյան մակերեսը, եթե քառակուսու կողմը b է:

17. Քառակուսու կենտրոնը O-ն է, իսկ կից կողմերի վրա ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ $\angle MON = 30^\circ$, $OM = 3$ և $ON = 4$: Գտնել այդ քառակուսու մակերեսը:

18. ABCD քառակուսու BC և DC կողմերի վրա ընտրված են P և Q կետերն այնպես, որ $\angle PAQ = 45^\circ$: M-ը և N-ը PA և QA հատվածների և BD անկյունագծի հատման կետերն են: Հայտնի է, որ AMN եռանկյան մակերեսը S է: Գտնել APQ եռանկյան մակերեսը:

19. ABCD քառակուսուց դուրս վերցված է P կետն այնպես, որ $AP = \sqrt{13}$ և $BP = 5$: Գտնել PC-ն, եթե քառակուսու կողմը 6 է:

5. Սեղան

1. Գտնել հավասարասրուն սեղանի միջին գիծը, եթե նրա անկյունագիծը 5 է, իսկ բարձրությունը՝ 4:

2. Գտնել հավասարասրուն սեղանի պարագիծը, եթե նրա մակերեսը $78\sqrt{2}$ է, միջին գիծը 13, հիմքերից մեկին առընթեր անկյունը՝ 45° :

3. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերից մեկին առընթեր անկյունը 60° է, անկյունագիծը կիսում է այդ անկյունը, իսկ սրունքը 8 է: Գտնել սեղանի պարագիծը:

4. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը 12 է և հիմքերից մեկի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել սեղանի մակերեսը:

5. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծն ուղահայաց է սրունքին: Գտնել սեղանի կողմերի միջնակետերը հաջորդաբար միացնելուց ստացված քառանկյան պարագիծը, եթե սեղանի մեծ հիմքը 10 է, իսկ սրունքը՝ 6:

6. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը $3\sqrt{13}$ է և ուղղահայաց է սրունքին: Հիմքերի տարբերությունը 8 է: Գտնել սեղանի մեծ հիմքը:

7. Հավասարասրուն սեղանի ստորին հիմքին առընթեր անկյունը 15° է, սրունքը՝ 8: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե վերին հիմքի գագաթը ստորին հիմքի միջնակետի հետ միացնող հատվածը 8 է:

8. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Գտնել սեղանի բարձրությունը, եթե նրա մակերեսը S է:

9. Հավասարասրուն սեղանի սրունքները շարունակելիս հատվում են ուղիղ անկյան տակ: Գտնել սեղանի պարագիծը, եթե նրա մակերեսը 12 է, իսկ բարձրությունը՝ 2:

10. ABCD հավասարասրուն սեղանի AD հիմքը 8 է, իսկ BC-ն՝ 6: AM և CN հատվածները ուղղահայաց են BD-ին, ընդ որում M-ը գտնվում է B-ի և N-ի միջև: Գտնել CN-ը, եթե $BM : DN = 2 : 3$:

11. Հավասարասրուն սեղանի բարձրությունը 2 է: Սեղանի վերին հիմքը ստորին հիմքի միջնակետից երևում է 30° անկյունով, իսկ ստորին հիմքը վերին հիմքի միջնակետից՝ 150° անկյունով: Գտնել սեղանի մակերեսը:

12. ABCD հավասարասրուն սեղանում $AD = 15$, $BC = 1$, $AB = CD = 8$: BAD անկյան կիսորդը հատում է BC կիսաուղիղը K կետում: Գտնել ABK եռանկյան B անկյան կիսորդը:

13. Ուղղանկյուն սեղանը անկյունագծով տրոհվում է երկու եռանկյունների, որոնցից մեկը 28 կողմով կանոնավոր եռանկյուն է: Գտնել սեղանի միջին գիծը:

14. Ուղղանկյուն սեղանի հիմքերը 2 և 4 են, մակերեսը՝ 18: Գտնել անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը մեծ հիմքից:

15. Ուղղանկյուն սեղանի հիմքերը 17 և 25 են, մեծ սրունքը՝ 10: Մեծ սրունքի միջնակետում կանգնեցված է ուղղահայաց, մինչև մյուս սրունքը պարունակող ուղղի հետ հատվելը: Գտնել նրա երկարությունը:

16. Ուղղանկյուն սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, մեծ անկյունագիծը փոքրի հետ հատման կետով բաժանվում է 36 և 64 երկարությամբ հատվածների: Գտնել սեղանի մակերեսը:

17. Սեղանի հիմքերից մեկին առընթեր անկյունների գումարը 90° է, իսկ հիմքերը՝ 24 և 18 են: Գտնել հիմքերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:

18. Սեղանի հիմքերը 30 և 40 են, իսկ հիմքերից մեկին առընթեր անկյունները 130° և 140° : Գտնել սեղանի հիմքերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:

19. Սեղանի հիմքերը 7 և 8 են, անկյունագծերը 13 և 14: Գտնել սեղանի մակերեսը:

20. ABCD սեղանի AD և BC սրունքների միջնակետերը համապատասխանաբար M-ը և N-ն են: Գտնել ANCM քառանկյան մակերեսը, եթե սեղանի մակերեսը 24 է:

21. Սեղանի հիմքերը 8 և 4 են: Գտնել անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:

22. ABCD սեղանի BC հիմքի վրա նշված է M, իսկ CD սրունքի վրա N կետը: K-ն AM և BN հատվածների հատման կետն է: Հայտնի է, որ $MK : AK = 1 : 3$ և $BK : KN = 1 : 2$: Գտնել $(CN : ND)$ -ն:

23. Սեղանի հիմքին զուգահեռ հատվածը (ծայրակետերը պատկանում են սրունքներին) անցնում է անկյունագծերի հատման կետով: Գտնել այդ հատվածը, եթե սեղանի հիմքերը 2 և 6 են:

24. Սեղանի հիմքերը 2 և 6 են: Գտնել հիմքին զուգահեռ այն հատվածը, որը սեղանի մակերեսը բաժանում է հավասար մասերի և որի ծայրակետերը պատկանում են սրունքներին:

25. Սեղանի հիմքերը a և b են ($a > b$): Հիմքերին զուգահեռ ուղիղն այդ սեղանի սրունքը բաժանում է $m : n$ հարաբերությամբ հաշված մեծ հիմքից: Գտնել այդ ուղիղի՝ սեղանի սրունքների մեջև ընկած հատվածի երկարությունը:

26. Սեղանի սրունքներից մեկը 6 է, բութ անկյուններից մեկի կիսորդը զուգահեռ է այդ սրունքին և հիմքը բաժանում է հավասար մասերի: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրա պարագիծը 26 է:

27. Սեղանի հիմքերից մեկին առընթեր բութ անկյունների կիսորդների հատման կետը պատկանում է մյուս հիմքին: Գտնել սեղանի մեծ հիմքը, եթե նրա բարձրությունը 12 է, իսկ տարված կիսորդները 13 և 15:

28. ABCD սեղանի ($AB \parallel CD$) B և D անկյունների կիսորդներն անցնում են դիմացի հիմքերի միջնակետերով: Սեղանի պարագիծը 30 է, իսկ AB հիմքին առընթեր մեծ անկյունը՝ 60° : Գտնել սեղանի մակերեսը:

29. M-ը և N-ը ABCD սեղանի AD և CB սրունքների միջնակետերն են: AN և BM հատվածները հատվում են S կետում: Հայտնի է, որ AS եռանկյան մակերեսը 8 է և $DC : AB = 1 : 2$: Գտնել սեղանի մակերեսը:

30. M-ը և N-ը ABCD սեղանի AB և CD հիմքերի միջնակետերն են: Հայտնի է, որ $AN \perp DM$, $MC \perp BN$ և $\angle DMC = 60^\circ$: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրա բարձրությունը $\sqrt{3}$ է:

31. ABCD սեղանի AD և BC հիմքերը համապատասխանաբար 9 և 3 են: E-ն AB կողմի միջնակետն է, F-ը՝ CD-ի: BAD անկյան կիսորդը հատում է EF միջին գիծը P կետում, իսկ ADC անկյան կիսորդը՝ Q կետում: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե $EQ = PQ = PF$:

32. ABCD սեղանի բարձրությունը 7 է, իսկ AD և BC հիմքերը՝ համապատասխանաբար 8 և 6: CD սրունքի վրա գտնվող E կետով տարած BE ուղիղը AC անկյունագիծը հատում է O կետում և այն բաժանում $AO : OC = 3 : 2$ հարաբերությամբ: Գտնել OEC եռանկյան մակերեսը:

33. Սեղանը անկյունագծերով տրոհված է չորս եռանկյունների: Սեղանի մակերեսը 64 է, հիմքերը հարաբերում են, ինչպես 1 : 3: Գտնել մեծ հիմքին առընթեր եռանկյան մակերեսը:

34. ABCD սեղանի մեջ $AD \parallel BC$, $AD > BC$: AB և DC ուղիղները հատվում են K կետում այնպես, որ KBD և BCD եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես 4 : 1: Ի՞նչ հարաբերությամբ է սեղանի անկյունագծերի հատման կետը բաժանում սեղանի բարձրությունը (հաշված փոքր հիմքից):

35. ABCD սեղանի AC անկյունագիծը տրոհում է սեղանը 5 և 9 մակերես ունեցող եռանկյունների: AB, BC, CD և DA կողմերի վրա վերցված են M, N, P և Q կետերն այնպես, որ $AM = 2MB$, $BN = 3NC$, $CP = 4PD$ և $DQ = 5QA$: Գտնել MNPQ քառանկյան մակերեսը:

36. AB և CD հիմքերով սեղանի B անկյան կիսորդը ուղղահայաց է AD սրունքին և հատում է նրան E կետում: Գտնել AEB եռանկյան և BEDC քառանկյան մակերեսների հարաբերությունը, եթե հայտնի է, որ $AE = 2 DE$:

37. ABCD հավասարասրուն սեղանի AB հիմքը 2 է և $\angle A = 60^\circ$: A անկյան կիսորդը և C գագաթից իջեցրած ուղղահայացը հատվում են BD անկյունագծին պատկանող կետում: Գտնել CD հիմքը:

6. Սեղանին ներգծած է շրջանագիծ

1. Գտնել $7\sqrt{2}$ շառավով շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի պարագիծը, եթե նրա սուր անկյունը 45° է:

2. Շրջանագծին արտագծած սեղանի սրունքները 8 և 6 են, իսկ մեծ հիմքին առընթեր սուր անկյուններից փոքրը՝ 30° : Գտնել սեղանի մակերեսը:

3. Գտնել շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը, եթե սեղանի պարագիծը 32 է, իսկ շրջանագծի շառավիղը՝ 3:

4. Շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի հիմքերը 4 և 16 են: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

5. Գտնել r շառավղով շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի հիմքերի արտադրյալը:

6. Ուղանկյուն սեղանին ներգծած շրջանագծի շառավիղը R է, մի սրունքը հիմքի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել սեղանի մակերեսը:

7. 6 շառավղով շրջանագծին արտագծած է հավասարասրուն սեղան: Գտնել սեղանի մակերեսը եթե սրունքների շոշափման կետերի հեռավորությունը 8 է:

8. Շրջանագծին արտագծած է ուղղանկյուն սեղան, որի թեք սրունքի ծայրակետերի հեռավորությունները շրջանագծի կենտրոնից 15 և 20 են: Գտնել սեղանի պարագիծը:

9. Շրջանագծին արտագծած է ուղղանկյուն սեղան, որի սրունքները 20 և 25 են: Ի՞նչ երկարությամբ հատվածների է բաժանվում սեղանի մեծ սրունքը շոշափման կետով:

10. a փոքր հիմքով սեղանին ներգծված է շրջանագիծ, որը սեղանի սրունքներից մեկը շոշափման կետով բաժանում է m և n երկարությամբ հատվածների՝ հաշված մեծ հիմքից: Որոշել սեղանի մակերեսը:

11. $R = 1$ շառավղով շրջանագծին արտագծված է հավասարասրուն սեղան, որի հիմքերից մեկին առընթեր անկյունը 30° է: Գտնել այն քառանկյան մակերեսը, որի գագաթները շրջագծի և սեղանի կողմերի շոշափման կետերն են:

7. Սեղանին արտագծած է շրջանագիծ

1. Շրջանագծին ներգծած սեղանի սրունքը շրջանագծի կենտրոնից երևում է 60° անկյունով: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրա բարձրությունը 12 է:

2. Շրջանագծին ներգծած սեղանի հիմքերը 14 և 4 են, սրունքը՝ 13: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

3. 10 շառավղով շրջանագծին ներգծած սեղանի բարձրությունը շրջանագծի կենտրոնով տրոհվում է $3 : 4$ հարաբերությամբ մասերի: Գտնել սեղանի հիմքերը, եթե հայտնի է որ բարձրությունը հավասար է միջին գծին:

4. Գտնել 10 և 6 հիմքերով հավասարասրուն սեղանի սրունքը, եթե հայտնի է, որ նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը հիմքի վրա է:

5. R շառավղով շրջանագծին ներգծված է սեղան, որի մի հիմքը երկու անգամ մեծ է մյուս կողմերից յուրաքանչյուրից: Գտնել սեղանի մակերեսը:

6. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը հարաբերում են ինչպես $5 : 12$, իսկ բարձրությունը 17 է: Գտնել սեղանին արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ սեղանի միջին գիծը հավասար է բարձրությանը:

7. Գտնել 2 և 14 հիմքերով և 10 սրունքով հավասարասրուն սեղանին արտագծված շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը սրունքից:

8. BC և AD հիմքերով $ABCD$ սեղանին արտագծած շրջանագծի CD փոքր աղեղի վրա վերցված E կետի համար $\angle CED = 120^\circ$ և $\angle ABE - \angle BAE = 60^\circ$: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը, եթե $EB = 10$:

8. Քառանկյուն, ներգծած և արտագծած քառանկյուններ

1. Գտնել շրջանագծին ներգծած քառանկյան անկյունները, եթե հանդիպակաժ կողմերը պարունակող ուղիղների կազմած անկյունները 40° և 60° են:

2. O -ն $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե ABD , ACD և AOD եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար 7, 9 և 3 են:

3. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյունը այնպիսին է, որ նրա անկյունների կիսորդները հատվում են միևնույն O կետում: Հաշվել $\angle AOB + \angle DOC$:

4. O -ն $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան A և B անկյունների կիսորդների հատման կետն է: Գտնել $\angle AOB$ -ն, եթե $\angle C + \angle D = 230^\circ$:

5. O -ն $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Հայտնի է, որ AOD և BOC եռանկյունները հավասարամեծ են: Գտնել $(\angle A + \angle D)$ -ն:

6. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան մեջ $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 90^\circ$, $BC = 3$ և $CD = 4$: Գտնել AC -ն:

7. ABCD ուռուցիկ քառանկյան AC և BD անկյունագծերը փոխադրահայաց են: Հայտնի է որ $AB = 10$, $BC = 11$ և $CD = 7$: Գտնել AD-ն:

8. Շրջանագծին ներգծած է ABCD ուռուցիկ քառանկյունը: Գտնել $\angle ABC$ -ն եթե $AB : BC : CD : DA = 3 : 1 : 2 : 1$:

9. 4 շառավղով շրջանագծին արտագծած քառանկյան անկյունագծերը 12 և 14 են և կազմում են 60° անկյուն: Գտնել քառանկյան պարագիծը:

10. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը 12 և 16 են, իսկ հակադիր կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները կազմում են 60° անկյուն: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը:

11. Շրջանագծին արտագծած ABCD քառանկյան մեջ $AB = 13$, $BC = 20$, $CD = 17$, իսկ AC անկյունագիծը 21 է: Որոշել շրջանագծի շառավիղը:

12. Շրջանագծին ներգծած է ABCD քառանկյունը, որում $AB = BC = a$ և $\angle BCD = \alpha$: Գտնել A, B և M կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, որտեղ M-ը քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է:

13. ABCD ուռուցիկ քառանկյան AC և BD անկյունագծերը ուղղահայաց են, հատվում են O կետում և $AO = OD$: K-ն BC հատվածի միջնակետն է: Հայտնի է, որ AKD եռանկյունը հավասարակողմ է և նրա մակերեսը 24 է: Գտնել ABCD քառանկյան մակերեսը:

14. Շրջանագծին ներգծած է ABCD ուռուցիկ քառանկյունը, M-ը այդ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է, իսկ AB-ն՝ շրջանագծի տրամագիծը: Գտնել AM-ը եթե $BC = 3$ և $CM = 0,75$ և ABC եռանկյան մակերեսը ACD եռանկյան մակերեսի եռապատիկն է:

15. Շրջանագծին ներգծած ABCD քառանկյան AC և BD անկյունագծերը կիսում են AD կողմին առնթքեր անկյունները: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե $AB = 6$ և $AD = 12$:

16. Շրջանագծին ներգծած քառանկյան անկյունագծերը 20 և 22 են և փոխադրահայաց են: Գտնել այդ քառանկյան կողմերը, եթե շրջանագծի շառավիղը $5\sqrt{5}$ է:

17. M-ը և N-ը ABCD ուռուցիկ քառանկյան AB և CD կողմերի միջնակետերն են: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե $MN = 12$, $AC = 18$ և MN և AC հատվածների կազմած անկյունը 30° է:

18. M-ը և N-ը ABCD ուռուցիկ քառանկյան AB և CD կողմերի միջնակետերն են: AN և DM հատվածները հատվում են P, իսկ BN և CM հատվածները՝ Q կետերում: Գտնել ABCD քառանկյան մակերեսը, եթե MQNP քառանկյան մակերեսը 7 է:

19. ABCD ուռուցիկ քառանկյան AB և CD կողմերի միջնակետերը K-ն և M-ն են: Քառանկյունն այնպիսին է, որ մյուս երկու կողմերի վրա հնարավոր է ընտրել L և N կետերն այնպես, որ KLMN-ը ուղղանկյուն է: Գտնել այդ ուղանկյան մակերեսը, եթե ABCD քառանկյան մակերեսը 14 է:

20. ABCD քառանկյանը կարելի է ներգծել և արտագծել շրջանագիծ: AC անկյունագիծը քառանկյունը տրոհում է հավասարամեծ եռանկյունների: Գտնել BD անկյունագիծը, եթե քառանկյան պարագիծը p է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ r :

21. ABCD ուռուցիկ քառանկյան պարագիծը $5 + \sqrt{3}$ է, $\angle A = 90^\circ$ և $\angle B = 60^\circ$: A գագաթից BC-ին տարված է AN բարձրությունը և $BN = NC$, իսկ B անկյան կիսորդը AD-ն հատում է M կետում և $AM = 2MD$: Գտնել DC կողմը:

22. ABCD ուռուցիկ քառանկյան մեջ $AB = BD$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 31^\circ$, $\angle DBC = 3^\circ$: Գտնել $\angle BDC$ -ն:

23. Շրջանագծին ներգծած ABCD ուռուցիկ քառանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են CD կողմին պատկանող կետում: Գտնել CD-ն, եթե $AD = p$ և $BC = q$:

Գ. ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

1. Ընդհանուր բնույթի խնդիրներ

1. Շրջանագծի 90° աղեղը ձգող լարը $6\sqrt{2}$ է: Գտնել այդ շրջանագծի 240° աղեղ ձգող լարը:

2. Շրջանագծում տարված է 120° աղեղ ձգող լար: Ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում շրջանի մակերեսը այդ լարով:

3. AB-ն շրջանագծի տրամագիծն է, իսկ $AC = 12$ լարի պրոյեկցիան այդ տրամագծի վրա 8 է: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

4. 6 շառավղով շրջանագծի որևէ կետից տարված են երկու լար, որոնք ձգում են 60° և 120° աղեղներ: Գտնել այդ լարերի միջնակետերի հեռավորությունը, եթե հայտնի է, որ այդ լարերի կազմած անկյունը սուր է:

5. Շրջանագծի լարը տրամագծի հետ կազմում է 30° անկյուն և այն տրոհում է 3 և 15 երկարությամբ հատվածների: Գտնել շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունն այդ լարից:

6. Շրջանագծի երկու զուգահեռ լարերը 14 և 40 են, իսկ նրանց հեռավորությունը 39: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

7. Շրջանագծի AB տրամագծին պատկանող M կետը միացված է այդ տրամագծին զուգահեռ CD լարի ծայրակետերին: Գտնել CM-ը և DM-ը, եթե $AB = 10$, $CD = 8$ և $AM : MB = 2 : 3$:

8. Սեկտորի պարագիծը 28 է, իսկ մակերեսը՝ 49: Գտնել սեկտորի շառավիղը:

9. AOB սեկտորի AB աղեղը 60° է, C-ն AO շառավղի միջնակետն է: BOC եռանկյան մակերեսը $18\sqrt{3}$ է: Գտնել սեկտորի մակերեսը:

10. Կանոնավոր վեցանկյան կողմը 20 է: Այդ վեցանկյանը ներգծված է շրջանագիծ: Գտնել այդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմը:

11. R շառավղով շրջանագծին արտագծած կանոնավոր բազմանկյան կողմը a է: Գտնել այդ շրջանագծին ներգծված և նույն թվով կողմեր ունեցող կանոնավոր բազմանկյան կողմը:

12. 4 շառավիղ և 60° կենտրոնական անկյուն ունեցող AOB սեկտորին ներգծած է քառակուսի, որի երկու գագաթները գտնվում են AB աղեղի, իսկ մյուս երկուսը AO և OB շառավիղների վրա: Գտնել քառակուսու մակերեսը:

13. 8 շառավիղ և 120° կենտրոնական անկյուն ունեցող AOB սեկտորին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն, որի մի գագաթը AB աղեղի միջնակետն է, իսկ մյուս երկուսը գտնվում են AO և OB շառավիղների վրա: Գտնել եռանկյան կողմը:

14. Շրջանագծի լարի հեռավորությունը կենտրոնից h է: Այդ լարը ձգող սեգմենտներից յուրաքանչյուրին ներգծած է քառակուսի (երկու գագաթները լարի վրա են մյուս երկուսը՝ լարը ձգող աղեղի): Գտնել այդ քառակուսիների կողմերի տարբերությունը:

15. Շրջանագծի մի կետից տարված են 10 և 12 երկարությամբ լարեր: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե փոքր լարի միջնակետի հեռավորությունը մեծ լարից 4 է:

2. Շրջանագիծը շոշափող և հատող

1. Ինչի $^\circ$ է հավասար կետի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից, եթե նրանից տարված շոշափողը 10 է, իսկ շրջանագծի տրամագիծը՝ 21:

2. R շառավղով շրջանագծի A և B կետերից տարված շոշափողները հատվում են C կետում: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $\angle CAB = 90^\circ$:

3. Երկու համակենտրոն շրջանագծերից մեծի երկու փոխադրահայաց լարերը շոշափում են փոքր շրջանագիծը: Գտնել փոքր շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ այդ լարերը հատվելիս բաժանվել են 7 և 3 երկարությամբ հատվածների:

4. M կետից 4 շառավղով շրջանագծին տարված են MA և MB շոշափողները: MA հատվածի K կետն ընտրված է այնպես, որ K կետից շրջանագծին տարված KC շոշափողը ուղղահայաց է MA-ին: Գտնել MKC եռանկյան մակերեսը, եթե $\angle AMB = 45^\circ$:

5. M կետից O կենտրոնով շրջանագծին տարված են MA և MB շոշափողները: AB լարը հատվում է MO հատվածի հետ K կետում: Գտնել AKM եռանկյան մակերեսը եթե $MK : KO = 4 : 1$ և $MA = 10$:

6. O գագաթով ուղիղ անկյան կողմերից մեկի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ $OA = 7$, $OB = 11$: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է A և B կետերով և շոշափում անկյան մյուս կողմը:

7. Շրջանագծի շառավիղը 8 է, իսկ նրա AB լարը՝ 4: A կետից տարված է շրջանագծին շոշափող, իսկ B կետից՝ այդ շոշափողին զուգահեռ լար: Գտնել շոշափողի և նրան զուգահեռ լարի հեռավորությունը:

8. Երկու գուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը 10 է: Շրջանագիծը շոշափում է այդ ուղիղները և անցնում է M կետով: Գտնել M կետի հեռավորությունը շոշափման կետերից, եթե նրա հեռավորությունը այդ ուղիղներից մեկից 3,6 է:

9. Շրջանագծում տարված են $AB = 30$ և $AC = 48$ լարերը: Հայտնի է, որ AC-ն գուգահեռ է B կետում շրջանագծի շոշափողին: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

10. AB-ն շրջանագծի տրամագիծ է և $\angle BOC = 60^\circ$: C կետում շրջանագծին տարած շոշափողը հատվում է AB-ն պարունակող ուղղի հետ D կետում: Գտնել $\angle DCB$ և $\angle DCA$ եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

11. A կետից շրջանագծին տարված են AB շոշափողը և հատող, որը շրջանագծի հետ հատվում է C և D կետերում: Գտնել $\angle CBD$ եռանկյան մակերեսը, եթե $AB : AC = 4 : 3$ և $\angle ABC$ եռանկյան մակերեսը 36 է:

12. Շրջանագծում տարված են AB և CD փոխուղղահայաց տրամագծերը: AB հատվածի K կետն ընտրված է այնպես, որ $AK : KB = 2 : 1$, E-ն CK ուղղի և շրջանագծի հատման կետն է, իսկ M-ը՝ AE և CD հատվածների հատման կետը: Գտնել $(CM : MD)$ -ն:

13. 10 շառավիղով շրջանի M կետի հեռավորությունը կենտրոնից 8 է: M կետով տարված են փոխուղղահայաց լարեր, որոնք M կետով անցնող տրամագծի հետ կազմում են 45° անկյուն: Գտնել այն քառանկյան մակերեսը, որի տրամագծերը այդ լարերն են:

14. A կետից տարված ուղիղը R շառավիղով շրջանագիծը շոշափում է M կետում: K կետը շրջանագծի վրա ընտրված է այնպես, որ $\angle AMK = 60^\circ$ և $AL : LK = 1 : 2$, որտեղ L-ը AK հատվածի և շրջանագծի հատման մյուս կետն է: Գտնել $\angle AMK$ եռանկյան մակերեսը:

15. 7 շառավիղով շրջանագծի տրամագծի M կետով տարված է AB լարը, որը տրամագծի հետ կազմում է 30° անկյուն: BC լարն ուղղահայաց է այդ տրամագծին: Գտնել $\angle ABC$ եռանկյան մակերեսը, եթե $AM : MB = 1 : 4$:

16. 60° -ի անկյան կողմերից մեկի վրա ընտրված են գագաթից 1 և 3 հեռավորությամբ կետեր: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է ընտրված կետերով և շոշափում անկյան մյուս կողմը:

17. Շրջանագիծը շոշափում է ուղիղ անկյան կողմերից մեկը, մյուս կողմը հատում է A և B կետերում, իսկ անկյան կիսորդը հատում C և D կետերում: Գտնել նրա շառավիղը, եթե $AB = \sqrt{6}$ և $DC = \sqrt{7}$:

18. Շրջանագիծը շոշափում է ABCD ուղղանկյան AB և AD կողմերը, հատում է BC կողմը M կետում և անցնում C գագաթով: Գտնել $\angle AMB$ սեղանի միջին գիծը, եթե $AB = 9$ և $AD = 8$:

3. Շրջանագիծ և եռանկյուն

1. ABC եռանկյան BP և CL կիսորդները հատվում են O կետում: Հայտնի է, որ O, P, L և A կետերը գտնվում են շրջանագծի վրա: Գտնել $\angle A$ -ն:

2. Եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնները սիմետրիկ են եռանկյան կողմերից մեկի նկատմամբ: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

3. Շրջանագծի կենտրոնը ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան C գագաթն է, իսկ շառավիղը՝ BC -ն: Այդ շրջանագիծը հատում է ներքնաձիգը D կետում: Գտնել BD -ն, եթե $BC = 4\sqrt{3}$ և $AC = 4\sqrt{6}$:

4. Շրջանագծի շառավիղը ուղղանկյուն եռանկյան փոքր էջն է, իսկ կենտրոնը՝ ուղիղ անկյան գագաթը: Շրջանագիծը ներքնաձիգը տրոհում է 18 և 7 երկարությամբ հատվածների (հաշված փոքր էջից): Գտնել եռանկյան էջերը:

5. ABC ուղղանկյուն եռանկյան BC էջը տրամագիծ ունեցող շրջանագիծը AB ներքնաձիգը հատում է K կետում: Գտնել BCK եռանկյան մակերեսը, եթե $CB = a$, $CA = b$:

6. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 9 և 12 են: Փոքր էջի և ներքնաձիգի միջնակետերով անցնող շրջանագիծը շոշափում է ներքնաձիգը: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը:

7. Շրջանագծի տրամագիծը ABC ուղղանկյուն եռանկյան CD բարձրությունն է: Շրջանագիծը հատում է CA և CB էջերը համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել եռանկյան էջերը, եթե $CM = 12$ և $CN = 18$:

8. Շրջանագիծը շոշափում է ուղղանկյուն եռանկյան մեծ էջը, անցնում հանդիպակաց սուր անկյան գագաթով, իսկ կենտրոնը ներքնաձիգի վրա է: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե եռանկյան էջերը 5 և 12 են:

9. Շրջանագծի կենտրոնը ABC ուղղանկյուն եռանկյան AB ներքնաձիգի վրա է, շոշափում է AC և BC էջերը M և N , հատում ներքնաձիգը K և L կետերում: Գտնել MKL եռանկյան մակերեսը, եթե $NB = p$ և $AM = q$:

10. 3 շառավղով շրջանագիծը շոշափում է ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը, մյուս էջի և ներքնաձիգի շարունակությունները: Գտնել եռանկյան կողմերը, եթե նրա մակերեսը 6 է:

11. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գագաթները գտնվում են 10 շառավղով կիսաշրջանագծի, իսկ ուղիղ անկյան գագաթը՝ տրամագծի վրա: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե ներքնաձիգը զուգահեռ է տրամագծին և եռանկյան սուր անկյուններից մեկը 30° է:

12. Կիսաշրջանագիծը շոշափում է եռանկյան AB կողմը, նրա տրամագիծը զուգահեռ է AB -ին և ծայրակետերը գտնվում են BC և AC կողմերի վրա: Գտնել կիսաշրջանագծերի շառավիղը, եթե եռանկյան CD բարձրությունը 6 է, իսկ $AB = 4$:

13. 2 շառավղով կիսաշրջանագծի կենտրոնը ABC ուղղանկյուն եռանկյան BC էջի վրա է: Կիսաշրջանագիծն անցնում է B գագաթով և շոշափում եռանկյան AC ներքնաձիգը: Գտնել $(AC + BC)$ -ն, եթե $AB = 6$:

14. r շառավղով շրջանագիծն անցնում է ABC եռանկյան A և B գագաթներով, շոշափում AC կողմը, իսկ կենտրոնը BC ուղղի վրա է: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $AB = r$:

15. ABC եռանկյան մակերեսը $2\sqrt{3} - 3$ է, իսկ A անկյունը՝ 60° : Եռանկյան AC կողմին և BA և BC կողմերի շարունակություններին շոշափող շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$ է: Գտնել եռանկյան մյուս անկյունները:

16. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 2\alpha$ և $\angle B = 2\beta$, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը r է: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է AB կողմը և CA, CB կողմերի շարունակությունները:

17. Շրջանագծի տրամագիծը ABC հավասարասրուն եռանկյան AD բարձրությունն է, իսկ AB հիմքը այդ շրջանագծով տրոհվում է 8 և 12 երկարությամբ հատվածների: Գտնել AB հիմքին իջեցրած բարձրությունը:

18. ABC հավասարասրուն եռանկյան A գագաթը համարելով կենտրոն գծված է շրջանագիծ AC շառավիղով, որն AB սրունքը հատում է D կետում: Գտնել եռանկյան BC սրունքը, եթե $AC = 6$, $DC = 8$:

19. ABC եռանկյան AC կողմի, որպես տրամագծի վրա կառուցած շրջանագիծն անցնում է BC կողմի միջնակետով և D կետում հատում է AB կողմը: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը եթե $AC = 12$ և $BD : AD = 1 : 7$:

20. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB հիմքը 12 է, իսկ $\angle C = 20^\circ$: A կենտրոնով և AB շառավիղով շրջանագիծը եռանկյան սրունքները հատում է M և N կետերում: Գտնել MN-ը:

21. Շրջանագծի տրամագիծը ABC եռանկյան A ուղիղ անկյան գագաթից տարված AD բարձրությունն է: Շրջանագիծը հատում է AB և AC էջերը համապատասխանաբար K և M կետերում: Գտնել ABC եռանկյան սուր անկյունները, եթե $AK : AL = AL : AM$, որտեղ L-ը AD և KM հատվածների հատման կետն է:

22. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 30^\circ$ և $\angle B = 45^\circ$: CM բարձրության վրա, իբրև տրամագծի, տարված շրջանագիծը AC և BC կողմերը հատում է P և Q կետերում: Գտնել ABC և PQC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

23. ABC եռանկյան A բութ անկյան գագաթից տարված է AD բարձրությունը: D կենտրոնով և AD շառավիղով շրջանագիծը հատում է AB և AC կողմերը համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել AC-ն, եթե $AB = c$, $AM = n$, $AN = m$:

24. R շառավիղով շրջանագիծը անցնում է ABC եռանկյան A և C գագաթներով, շոշափում AB և BC կողմերը և հատում BD միջնագիծը L կետում: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե $BL : BD = 5 : 9$:

25. Որոշել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է 6, 25 և 29 կողմեր ունեցող եռանկյան երկու կողմերը, իսկ կենտրոնը մեծ կողմի վրա է:

26. ABC եռանկյան B և C գագաթներով անցնող շրջանագիծը AB կողմը հատում է K, իսկ AC կողմը՝ E կետում: Գտնել AE-ն, եթե $AK = KB = a$, $\angle BCK = \alpha$ և $\angle CBE = \beta$:

27. ABC եռանկյան BAC անկյան կիսորդը a է: Այդ կիսորդի վրա, որպես տրամագիծ, կառուցած շրջանագիծը եռանկյան AB և AC կողմերը հատվելով բաժանում է 2 : 1 և 1 : 1 հարաբերությամբ մասերի (A կետից հաշված): Գտնել եռանկյան մակերեսը:

28. Շրջանագիծը շոշափում է ABC հավասարասրուն եռանկյան սրունքները և նրա կենտրոնը BC հիմքի վրա է: AB և AC սրունքների վրա, համապատասխանաբար ընտրված են P և Q կետերն այնպես, որ PQ-ն շոշափում է այդ շրջանագիծը: Գտնել BC-ն, եթե $BP = p$ և $CQ = q$:

29. 3 շառավղով շրջանագծի կենտրոնը եռանկյան AB կողմի վրա է, շրջանագիծն անցնում է A, C կետերով և շոշափում CB կողմը: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե նրա A գագաթից իջեցրած բարձրությունը 4,8 է:

30. ABC եռանկյան մակերեսը $2\sqrt{6}$ է: AC կողմը շոշափող և B կետով անցնող շրջանագիծը հատում է AB և BC կողմերը համապատասխանաբար D և E կետերում, ընդ որում $AD : BD = 2 : 1$ և $CE = EB$: Գտնել այդ շրջանագծի մակերեսը, եթե ED-ն նրա տրամագիծն է, իսկ $AB > BC$:

31. ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ $\angle A = \alpha$ և $\angle B - \angle C = \beta > 0$: Այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է, իսկ կենտրոնը՝ O կետը: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է A կետով, շոշափում BC կողմը և որի կենտրոնը OA հատվածի վրա է:

32. AD-ն ABC եռանկյան A անկյան կիսորդն է: AD տրամագծով շրջանագիծը AB կողմը հատում է M, իսկ AC կողմը՝ N կետում: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $AD = a$, $AM : MB = 2 : 1$ և $AN = NC$:

33. Շրջանագծի կենտրոնը հավասարասրուն եռանկյան գագաթներից մեկն է: Շրջանագիծն այդ եռանկյան սրունքներից մեկը բաժանում է երեք հավասար մասերի: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե եռանկյան հիմքը 12 է:

4. Շրջանագիծ և քառանկյուն

1. Շրջանագիծը շոշափում է ABCD քառակուսու AB և BC կողմերը, CD կողմը հատում M կետում այնպես, որ $CM = 8$ և $MD = 17$: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը:

2. ABCD սեղանի DM բարձրությունը հիմքը տրոհում է $AM : MB = 3 : 2$ հարաբերությամբ մասերի, իսկ AB տրամագծով շրջանագիծը կիսում է DC հիմքը: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե $AB = 20$ և $CD = 6$:

3. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը հարաբերում են, ինչպես 3 : 2: Մեծ հիմքը տրամագիծ ունեցող շրջանագիծը փոքր հիմքից հատում է նրա կեսին հավասար հատված: Փոքր հիմքից հաշված, ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում սրունքն այդ շրջանագծով:

4. ABCD զուգահեռագծի պարագիծը 26 է, $\angle ABC = 120^\circ$, իսկ BCD եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ $\sqrt{3}$: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե հայտնի է, որ $AD > AB$:

5. ABCD զուգահեռագծում $\angle BAD = 60^\circ$, իսկ A, B և D կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը R է: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ այդ շրջանագիծը անցնում է նաև CD կողմի միջնակետով:

6. Քառակուսու երկու գագաթները գտնվում են 10 շառավղով շրջանագծի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները՝ այդ շրջանագծի շոշափողի վրա: Գտնել քառակուսու կողմը:

7. a կողմով ABCD քառակուսու AB ճողմի M միջնակետով և D, C գագաթներով տարված է շրջանագիծ: Գտնել այդ շրջանագիծը և քառակուսու AB և AD կողմերը շոշափող այն շրջանագծի շառավիղը, որը չի անցնում M կետով:

8. 13 շառավղով շրջանագիծը շոշափում է 18 կողմով քառակուսու երկու կից կողմերը: Ինչպիսի՞ երկու հատվածների է բաժանում շրջանագիծը քառակուսու մյուս երկու կողմերից յուրաքանչյուրը:

9. ABCD սեղանին ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) արտագծված է շրջանագիծ, որի հետ սեղանի CK բարձրության շարունակությունը հատվում է F կետում: Սեղանի անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը սեղանի մեծ հիմքից 4 է, իսկ $DF = \sqrt{2}$: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

10. Շրջանագծին արտագծած է ABCD հավասարասրուն սեղանը ($AD \parallel BC$, $AD > BC$), CD-ն շրջանագիծը շոշափում է M, իսկ AM հատվածն այն հատում է N կետերում: Հայտնի է, որ $AN : NM = 2 : 5$: Գտնել ($AD : BC$)-ն:

11. Շրջանագծից դուրս գտնվող կետից շրջանագծին տարված են շոշափողներ և հատող, ընդ որում շոշափման և հատման կետերը հանդիսանում են սեղանի գագաթներ: Շոշափողներով կազմված անկյունը 60° է: Գտնել սեղանի հիմքերի հարաբերությունը:

12. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը 6 և 24 են: Հայտնի է, որ այդ սեղանին կարելի է ներգծել շրջանագիծ: Գտնել ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:

13. ABCD ($BC \parallel AD$) սեղանին արտագծած շրջանագծի կենտրոնը O_1 -ն է: AB սրունքի միջնակետի և O_1 կետի հեռավորությունը 4 է: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը 1 է:

14. Շրջանագծին ներգծած քառակուսու գագաթներով տարված են շրջանագծին շոշափողներ: Գտնել ստացված քառանկյան մակերեսը, եթե շրջանագծի շառավիղը 3 է:

15. ABCD սեղանի AB սրունքը ուղղահայաց է BC հիմքին: Շրջանագիծն անցնում է C և D կետերով և շոշափում է AB ուղղին E կետում: Գտնել E կետի հեռավորությունը CD ուղղից, եթե $AD = 4$, $BC = 3$:

5. Շրջանագծերի փոխադարձ դիրք

1. 10 և 17 շառավիղներով շրջանագծերը հատվում են: Հատման կետերի հեռավորությունը 16 է: Գտնել այդ շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:

2. Օ կենտրոնով շրջանագծի A կետից տարված են AC և AB լարերը: A, C և O կետերով անցնող շրջանագիծը հատում է AB լարը M կետում և $MB = 14$: Գտնել CM-ը:

3. Երկու շրջանագծեր հատվում են M և N կետերում: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը (A-ն և B-ն շոշափման կետերն են): Հայտնի է, որ $\angle AMB = 72^\circ$: Գտնել $\angle ANB$ -ն:

4. Երկու հատվող շրջանագծերի ընդհանուր լարը նրանց կենտրոններից երևում է 90° և 60° անկյունների տակ: Գտնել շրջանագծերի շառավիղները, եթե նրանց կենտրոնների հեռավորությունը $\sqrt{3} + 1$ է:

5. 60° -ի անկյանը ներգծված են 2 և 10 շառավիղներով շրջանագծեր: Գտնել նրանց կենտրոնների հեռավորությունը:

6. Արտաքին շոշափում ունեցող երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 15 է, իսկ շառավիղների հարաբերությունը 2 : 3: Գտնել նրանց շառավիղները:

7. 17 և 11 շառավիղներով շրջանագծերը ունեն ներքին շոշափում: Մեծ շրջանագծի լարը շոշափում է փոքր շրջանագիծը և ուղղահայաց է շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղղի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել այդ լարը:

8. 8 և 18 շառավիղներով շրջանագծերը C կետում ունեն արտաքին շոշափում: Տարված է նրանց AB ընդհանուր շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել ABC եռանկյան C գագաթից տարված միջնագիծը:

9. 2 և 8 շառավիղներով շրջանագծերը ունեն արտաքին շոշափում: Հավասարաբարուն եռանկյան սրույնքները նրանց ընդհանուր շոշափողներն են, իսկ հիմքը շոշափում է մեծ շրջանագիծը: Գտնել եռանկյան հիմքը:

10. 1 և 3 շառավիղներով շրջանագծերը C կետում ունեն արտաքին շոշափում: Տարված է նրանց AB ընդհանուր շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել ABC եռանկյան կողմերը:

11. O_1 և O_2 կենտրոններով r և R շառավիղներով շրջանագծերը ունեն արտաքին շոշափում: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել ABO_2O_1 քառանկյան մակերեսը:

12. 9 և 3 շառավիղներով շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 10 է: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել AB-ն:

13. 4 և 8 շառավիղներով շրջանագծերը հատվում են և հատման կետերից մեկով այդ շրջանագծերին տարված շոշափողները կազմում են 90° անկյուն: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել AB-ն:

14. 3 և 4 շառավիղներով շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 8 է: Փոքր շրջանագծի կենտրոնից մեծին տարած շոշափողները հատում են փոքր շրջանագիծը A և B կետերում: Գտնել AB-ն:

15. O_1 և O_2 կենտրոններով և համապատասխանաբար 1 և 5 շառավիղներով շրջանագծերը արտաքնապես շոշափում են: 9 երկարությամբ O_1A հատվածը O_1O_2 հատվածի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել այդ հատվածի այն մասի երկարությունը, որը գտնվում է շրջանագծերից դուրս:

16. Երկու շրջանագծեր հատվում են A և K կետերում և նրանց կենտրոնները գտնվում են AK ուղղի տարբեր կողմերում: A կետում այդ շրջանագծերից յուրաքանչյուրին տարված են շոշափողներ, որոնք հատում են շրջանագծերը A-ից տարբեր B և C կետերում: Գտնել AK-ն, եթե $BK = p$ և $CK = q$:

17. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ($\angle C = 90^\circ$) B գագաթը կենտրոն ընդունելով տարված է շրջանագիծ, որը AC էջը հատում է D, իսկ եռանկյանը արտագծած շրջանագիծը M և N կետերում: Գտնել DC-ն, եթե $CM = p$ և $CN = q$:

18. R և r շառավիղներով շրջանագծերը ($R > r$) շոշափվում են արտաքնապես A կետում: Մեծ շրջանագծի վրա գտնվող B կետից տարված է փոքրին C կետում շոշափող ուղիղ: Գտնել BC-ն, եթե $AB = a$:

19. O_1 և O_2 կենտրոններով 3 և 4 շառավիղներով շրջանագծերը հատվում են A և B կետերում և $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$: B կետով տարված ուղիղը այդ շրջանագծերը հատում է B-ից տարբեր C և D կետերում: Գտնել ACD եռանկյան մակերեսը, եթե $CD = 8$:

20. R և r շառավիղներով շրջանագծերն ունեն ներքին շոշափում A կետում: Գտնել ABC կանոնավոր եռանկյան կողմը, որի B և C գագաթները գտնվում են համապատասխանաբար R և r շառավիղներով շրջանագծերի վրա:

21. R և r շառավիղներով շրջանագծերն ունեն արտաքին շոշափում A կետում: Գտնել ABC կանոնավոր եռանկյան կողմը, որի B և C գագաթները գտնվում են համապատասխանաբար R և r շառավիղներով շրջանագծերի վրա:

22. O_1 և O_2 կենտրոններով 3 և 1 շառավիղներով շրջանագծերին տարված է ընդհանուր շոշափող. B-ն և C-ն շոշափման կետերն են, M-ը՝ շրջանագծերի հատման շոշափողին մոտակա կետը: Գտնել MBC եռանկյան մակերեսը, եթե $O_1O_2 = 2\sqrt{2}$:

23. Արտաքին շոշափում ունեցող 1 և 4 շառավիղներով երկու շրջանագծերին տարված է հատող այնպես, որ շրջանագծերը հատողի վրա առաջացրել են երեք հավասար հատվածներ: Գտնել այդ հատվածների երկարությունը:

24. R և r շառավիղներով ($R > r$) շրջանագծերը A կետում ունեն ներքին շոշափում: Մեծ շրջանագծի CD լարը ուղղահայաց է AB տրամագծին, E-ն այդ լարի և փոքր շրջանագծի հատման կետն է, որը C-ի հետ գտնվում է AB-ի մի կողմում: Գտնել AEC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

25. R շառավիղ ունեցող շրջանի AOB սեկտորի կենտրոնական անկյունը 60° է: Այդ սեկտորին ներգծված է շրջանագիծ, որը շոշափում է OA, OB հատվածները և AB աղեղը: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը:

26. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 15 և 20 են: Երկու իրար շոշափող և հավասար շրջանագծերից յուրաքանչյուրը շոշափում է այդ եռանկյան փոքր էջը և մյուս կողմերից մեկը: Գտնել այդ շրջանագծերի շառավիղը:

27. 10 շառավղով շրջանագծի A կետով տարված են երկու փոխուղղահայաց AB և AC լարեր: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տրված շրջանագծին և կառուցված լարերը, եթե $AB = 16$:

28. Երկու շրջանագծեր շոշափում են ուղիղ անկյան կողմերը և նրանցից մեկն անցնում է մյուսի կենտրոնով: Գտնել այդ շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:

29. r շառավղով շրջանագծի կենտրոնը 60° անկյան կողմի վրա է և այդ շրջանագծին շոշափում է անկյան և այդ անկյան կից անկյան կողմերը շոշափող շրջանագծի շառավիղը:

30. R շառավղով շրջանագծում տարված է $CD = R\sqrt{3}$ լարը: OA շառավիղը ուղղահայաց է CD -ին և հատվում է նրա հետ B կետում: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է BD , BA հատվածները և տված շրջանագծին:

31. Օ կենտրոնով շրջանագծի AB լարը OC շառավիղը հատում է D կետում, ընդ որում $\angle CDA = \frac{2\pi}{3}$: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է AD , DC հատվածները և AC աղեղը, եթե $OC = 2$, $OD = \sqrt{3}$:

32. a կողմով ABC հավասարակողմ եռանկյան BD բարձրության վրա, իբրև տրամագծի, կառուցված է շրջանագիծ: Գտնել այդ շրջանագծին և եռանկյան AB և AC կողմերը շոշափող այն շրջանագծի շառավիղը, որը չի հատում BD -ն:

33. a շառավղով շրջանագծի կենտրոնը 60° անկյան կողմի վրա է և շրջանագծին շոշափում է անկյան մյուս կողմը: Գտնել տված շրջանագծի հետ արտաքին շոշափում ունեցող և անկյան կողմերը շոշափող այն շրջանագծի շառավիղը, որն a -ից փոքր է:

34. 8 շառավղով երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափում: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է այդ շրջանագծերը և նրանց ընդհանուր շոշափողը:

35. 9 շառավղով երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 12 է: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տված շրջանագծերը և նրանց ընդհանուր շոշափողը:

36. 1 և 4 շառավիղներով շրջանագծերը ունեն արտաքին շոշափում: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է այդ շրջանագծերը և նրանց ընդհանուր շոշափողը:

37. R շառավղով երկու շրջանագծեր A կետում ունեն արտաքին շոշափում: Շրջանագծերից մեկի AB տրամագծի B ծայրակետից տարված է մյուսին BC շոշափողը: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տրված երկու շրջանագծերը և անցնում է C կետով:

38. 10 և 20 շառավիղներով շրջանագծերը A կետում ունեն արտաքին շոշափում, իսկ AB -ն փոքր շրջանագծի տրամագիծ է: Գտնել այն շրջանագծի շա-

ռավիղը, որը շոշափում է տված շրջանագծերը և B կետում փոքր շրջանագծին տարված շոշափողը:

39. Երեք շրջանագծեր գույգ առ գույգ ունեն արտաքին շոշափում: Նրանց կենտրոնները միացնող հատվածները կազմում են ուղղանկյուն եռանկյուն: Գտնել փոքր շրջանագծի շառավիղը, եթե մեծ և միջին շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար 6 և 4 են:

40. R շառավիղով շրջանագծի մեջ գտնվող երեք հավասար շրջանագծերը շոշափում են միմյանց և այդ շրջանագիծը: Գտնել նրանց շառավիղը:

41. 1, 2 և 3 շառավիղներով երեք շրջանագծեր արտաքնապես շոշափում են միմյանց: Գտնել փոքր շառավիղով շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը մյուս շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղղից:

42. Միմյանց շոշափող և r շառավիղ ունեցող երեք շրջանագծերից յուրաքանչյուրը շոշափում է հավասարակողմ եռանկյան երկու կողմերը: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

43. $AC = 36$ հատվածի միջնակետը B-ն է: AC ուղղի մի կողմում կառուցված են AC և AB տրամագծերով կիսաշրջանագծեր: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է այդ կիսաշրջանագծերը և AC ուղիղը:

44. 8 շառավիղով շրջանագծում տարված է AB լարը, որի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից 1 է: Առաջացած սեգմենտներից փոքրում տարված են միմյանց շոշափող երկու հավասար շրջանագծեր, որոնցից յուրաքանչյուրը շոշափում է նաև AB լարը և տված շրջանագիծը: Գտնել նրանց շառավիղը:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

8.3 1. $\sqrt{PQL}$: 2. $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$: 3. $d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}$: 4. $\sqrt{6}$: 5. 102: 6. 4; 6; 8: 7. 2; 4:
8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$: 10. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$: 11. $\frac{9}{2}$: 12. 36: 13. 80: 14. ա) 8, բ) 96, գ) 384: 15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$: 16. $\frac{\sqrt{2}}{18}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $\frac{1}{8} l^3 \sqrt{2}$: 2. 780 սմ³: 3. 525 սմ³, 290 սմ²: 4. 17280 սմ³: 5. 6 մ³: 6. 48 սմ³: 7. 12 սմ³:
8. 7320 սմ³: 9. R^3 : 10. 1) $\sqrt{2}$ մ³, 2) $a^2 \sqrt{2c^2 - b^2} = 450$: 11. $\frac{1}{2} a^3 \sqrt{2}$: 12. $\frac{1}{2} abc \sqrt{2}$,
($a + b$) $c\sqrt{3} \cdot 45^\circ$: 13. $\frac{1}{2} a^3$: 14. $\frac{1}{8} a^3 \sqrt{2}$; $\frac{1}{2} a^2(2 + \sqrt{2})$: 15. $\frac{1}{8} ac \sqrt{12a^2 - 3c^2}$: 16. 1) 3060 մ³,
2) 1 մ³: 17. 2 մ³: 18. am^2 :

8.4 1. $\frac{7}{27}$: 2. $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{2\pi}}$: 3. $(\sqrt[3]{2} - 1) : 1$: 4. $4 \cdot \frac{\sqrt{8} - 1}{\sqrt{3}}$:

8.5 1. $a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$: 2. $\frac{V}{6}, \frac{V}{6}, \frac{V}{6}, \frac{V}{6}$: 3. $\frac{1}{6} abc$: 4. $\frac{12}{\sqrt{61}}$: 5. $\frac{3}{2}$: 6. 1: 8. Եռանկյուն բուրգի համար՝
 $\frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}, \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h, \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(R \pm \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} \right), \frac{a^4 r \sqrt{3}}{6(a^2 - 12r^2)}, \frac{a}{24} \sqrt{48Q^2 - a^4}, \frac{\sqrt{3}}{12} h(b^2 - h^2),$
 $\frac{b^4(4R^2 - b^2)\sqrt{3}}{32R^3}, \frac{1}{6} (b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4Q^2}) \sqrt{b^2 \mp 2\sqrt{b^4 - 4Q^2}}$: Երկու պատասխան, եթե
 $2Q < b^2 < \frac{4}{\sqrt{3}} Q, \frac{\sqrt{3}}{4} h^2 (2R - h), \frac{r^2 h^2 \sqrt{3}}{h - 2r}, \frac{h}{2} (\sqrt{3h^4 + 12Q^2} - h^2 \sqrt{3}), \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 h$: Այստեղ
 $x^2 = Rr + r^2 \pm r\sqrt{r^2 - 2Rr - 3r^2}$, ընդ որում, եթե $0 < r < \frac{\sqrt{5} - 1}{4} R$, ապա $h = R \pm \sqrt{R^2 - 2x^2}$,
եթե $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} R \leq r \leq \frac{R}{3}$, ապա $h = R + \sqrt{R^2 - 2x^2}$: Բառանկյուն բուրգի համար՝ $\frac{a^2\sqrt{2}}{6} \sqrt{2b^2 - a^2},$
 $\frac{1}{3} a^2 h, \frac{2}{3} h(b^2 - h^2), \frac{a^2}{3} \left(R \pm \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}} \right), \frac{b^2(b^2 - 4R^2)}{3R}, \frac{2}{3} h^2(2R - h), \frac{2a^4 r}{3(a^2 - 4r^2)},$
 $\frac{a}{6} \sqrt{16Q^2 - a^4}, \frac{2}{3} (b^2 - \sqrt{b^4 - 4Q^2}) \sqrt{b^4 - 4Q^2}, \frac{2}{3} h(\sqrt{h^4 + 4Q^2} - h^2), \frac{4h^2 r^2}{3(h - 2r)}, \frac{4}{3} x^2 h$: Այստեղ
 $x^2 = Rr \pm r\sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}$, ընդ որում, եթե $0 < r < \frac{\sqrt{3} - 1}{4} R$, ապա $h = R \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, եթե
 $\frac{\sqrt{3} - 1}{4} R \leq r \leq (\sqrt{2} - 1)R$, ապա $h = R + \sqrt{R^2 - x^2}$:

9. $\frac{a^3}{24 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}, \frac{b^3}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}, \frac{h^3 \sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \cos \alpha}, \frac{8R^3}{9\sqrt{3}} (1 + 2 \cos \alpha)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$
 $\frac{8r^3 \sqrt{3} \cos^3 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} (1 + 2 \cos \alpha)}, \frac{Q^{\frac{3}{2}}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2(1 + 2 \cos \alpha)}{\sin \alpha}}, \frac{a^3}{12} \operatorname{tg} \beta, \frac{b^3}{4} \sqrt{3} \cos^2 \beta \sin \beta, \frac{1}{4} h^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \beta,$

$$\frac{1}{2} R^3 \sqrt{3} \sin^2 2\beta \sin^2 \beta, \frac{r^3 \sqrt{3}}{4} \operatorname{ctg}^2 \beta (1 + \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \beta + 1})^3, \frac{Q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{3}} \sin \gamma \sqrt{\cos \gamma}, \frac{a^3}{24} \operatorname{tg} \gamma, \frac{b^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \gamma}{(\operatorname{tg}^2 \gamma + 4)^{\frac{3}{2}}},$$

$$h^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \gamma, \frac{8R^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \gamma}{(1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \gamma)^3}, \frac{r^3 \sqrt{3} (1 + \cos \gamma)^3}{\cos \gamma \sin^2 \gamma}, \frac{2Q^{\frac{3}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} \beta}}{\sqrt[4]{3(4 + \operatorname{ctg}^2 \beta)^3}}, \frac{a^3 \cos \frac{\varphi}{2}}{12 \sqrt{1 - 2 \cos \varphi}},$$

$$\frac{b^3 (1 - 2 \cos \varphi) \cos \frac{\varphi}{2}}{12 \sin^3 \frac{\varphi}{2}}, \frac{h^3 \sqrt{3} (1 - 2 \cos \varphi)}{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}, \frac{2R^3 \sqrt{3} \cos^4 \frac{\varphi}{2} (1 - 2 \cos \varphi)}{27 \sin^6 \frac{\varphi}{2}}, \frac{r^3 \sqrt{3} (1 - 2 \cos \varphi + \sqrt{3})^3}{4 \sqrt{1 - 2 \cos \varphi} \cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$\frac{2}{3} Q^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} 4 \sqrt{1 - 2 \cos \varphi}: 10. \frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}, \frac{4}{3} b^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}, \frac{4}{3} h^3 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \frac{32}{3} R^3 \cos^2 \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} r^3 \frac{\cos^3 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}, \frac{4\sqrt{2}}{3} Q^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha}, \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \operatorname{tg} \beta, \frac{2}{3} b^3 \cos^2 \beta \sin \beta, \frac{2}{3} h^3 \operatorname{ctg}^2 \beta,$$

$$\frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\beta \sin^2 \beta, \frac{2}{3} r^3 \operatorname{ctg}^2 \beta (1 + \sqrt{2 \operatorname{tg}^2 \beta + 1})^3, \frac{4}{3} Q^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \beta}}{\sqrt[4]{(2 + \operatorname{ctg}^2 \beta)^3}}, \frac{a^3}{6} \operatorname{tg} \gamma, \frac{4b^3 \operatorname{tg} \gamma}{3 \sqrt{(\operatorname{tg}^2 \gamma + 2)^3}},$$

$$\frac{4}{3} h^3 \operatorname{ctg}^2 \gamma, \frac{32R^3 \operatorname{ctg}^2 \gamma}{3(1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \gamma)^3}, \frac{4r^3 (1 + \cos \gamma)^3}{\cos \gamma \sin^2 \gamma}, \frac{4}{3} Q^{\frac{3}{2}} \sin \gamma \sqrt{\cos \gamma}, \frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{6 \sqrt{-\cos \varphi}},$$

$$\frac{2b^3 (-\cos \varphi) \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}, \frac{4}{3} h^3 \frac{(-\cos \varphi)}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}, \frac{32R^3 \cos^4 \frac{\varphi}{2} (-\cos \varphi)}{3 \sin^6 \frac{\varphi}{2}}, \frac{4r^3 (1 + \sqrt{-\cos \varphi})^3}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{-\cos \varphi}},$$

$$\frac{4}{3} Q^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt[4]{-\cos \varphi}: 11. \frac{1}{6}: 12. \text{u)} 5 : 1, \text{p)} 119 : 9: 13. 4 \frac{1}{2}: 14. \text{Q-njnybmjn znm} \text{h}: 15. \frac{13}{27}:$$

$$\boxed{8.6} 1. \frac{1}{3} \sqrt{2 \operatorname{SPQ}}: 2. \frac{1}{6} abd: 3. \frac{153 \sqrt{35}}{64}: 4. \frac{\sqrt{2}}{18}: 5. \frac{V}{30}, \frac{7V}{40}, \frac{23V}{180}, \frac{V}{10}, \frac{V}{24}: 6. \frac{41}{45}: 7. \frac{1}{27}: 8. \frac{6}{9 + \sqrt{13} + 2\sqrt{10}}: 9. \frac{1}{12}: 10. \alpha \beta V: 11. \frac{V}{15}: 12. \frac{2}{15} V, \frac{1}{60} V, \frac{3}{10} V, \frac{1}{24} V, \frac{23}{120} V: 13. \frac{a^2 h \sqrt{3}}{3}:$$

$$14. 3r, r \leq \frac{\sqrt[4]{3}}{3}: 15. \frac{1}{6} bh(c + 2a): 16. \frac{2}{3} a^2 h \sqrt{3}: 17. \frac{119}{360}:$$

$$\boxed{8.7} 2. \frac{2PQ \cos \frac{\alpha}{2}}{P + Q}: 3. \arcsin \sqrt{\frac{3}{5}}: 4. \arcsin \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}: 5. 2 : 1: 6. \frac{\sqrt{2 \operatorname{SPQ}}}{S + P + Q + \sqrt{S^2 + P^2 + Q^2}}, \frac{\sqrt{2 \operatorname{SPQ}}}{S + P + Q - \sqrt{S^2 + P^2 + Q^2}}, 7. 18 : 17: 8. 9 : 10: 9. 5 : 3: 11. 1: 12. R \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}:$$

Լրացուցիչ խնդիրներ

$$1. \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}: 2. \frac{5}{6}: 3. \frac{1}{2}: 4. \frac{5}{8}: 5. \frac{2}{3}: 6. \sin \alpha: 7. \frac{1}{4} abc: 8. \frac{3}{7\sqrt{14}}: 9. \frac{\sqrt{3}}{4}: 10. \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{4 + \sqrt{7}}:$$

11. Ցուցում, նախ ապացուցեք, որ տված կողերը փոխադրահայաց են: 12. Ցուցում. պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է 4S. դա բխում է նրանից, որ յուրաքանչյուր կողմնային նիստ կարելի է տրոհել գնդի և այդ նիստի շոշափման կետը ընդհանուր գագաթ ունեցող 4 եռանկյունների: Կողմնային կողերին առընթեր եռանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է հիմքերին առընթեր եռանկյունների մակերեսների գումարին, իսկ վերջիններիս գումարը 2S է: Պատասխան՝ պրիզմայի ծավալը հավասար է 2S: Խնդիրը լուծում ունի, եթե $S > \pi$: 13. 5 : 3: 14. Բուրգի ծավալը 96 է, ներգծած գնդի շառա-

$$վիղը՝ $\frac{24}{7 + \sqrt{10} + \sqrt{17}}$, երկնիստ անկյունները՝ $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\arcsin \frac{3}{\sqrt{17}}$, $\arcsin \frac{13}{5\sqrt{10}}$,$$

$$\pi - \arcsin \frac{13}{\sqrt{170}}: 15. \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{10} \text{ կամ } \pi - \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{10}: 16. \frac{64}{81}: \text{Ցուցում. դիցուք } r\text{-ը բուրգի}$$

հիմքին ներգծած շրջանագծի շառավիղն է, իսկ h -ը՝ բուրգի բարձրությունը: Բուրգի ծավալը հավասար է $k \cdot r^2 \cdot h$, որտեղ k գործակիցը կախված է n -ից: Ունենք $2h = r^2 + h^2$: Տեղադրելով r^2 -ու արժեքը ծավալի բանաձևի մեջ, ստանում ենք, որ պետք է գտնել $2h^2 - h^3$ արտա-

$$\text{հայտության մեծագույն արժեքը: Իսկ դա ստացվում է } h = \frac{4}{3} \text{ դեպքում: } 18. \frac{1}{24}: 19. \sqrt[4]{7}: \text{Ցուցում. արտագծած գնդի շառավիղը չի կարող փոքր լինել բուրգի հիմքին արտագծած}$$

շրջանագծի շառավիղից, այսինքն փոքրագույն շառավիղը 2 է: 20. $\frac{abc}{ab + bc + ca}$: 21. $\frac{1}{24} a^3 \sqrt{2}$, երկու անգամ փոքր: 22. 1) 6 : 1, 2) 9 : 2: 23. 360 սմ³: 24. 48 սմ³: 25. 420 սմ³: 26. 1) 1800 սմ³,

$$2) 16 \text{ սմ}^3: 27. \sqrt{11}: 28. 400 \text{ սմ}^3, 180 \text{ սմ}^2: 29. \frac{1}{3} \text{ մ}^3 30. 80 \text{ սմ}^3 31. 576 \text{ սմ}^3: 32. 1 : 7 : 19 : 37 : 61:$$

$$33. 2325 \text{ մ}^2: 34 1) 8 \text{ մ}^2, 2) 2 \text{ սմ}^2 \text{ և } 8 \text{ սմ}^2: 35. 1900 \text{ մ}^3: 36. 10,5 \text{ մ}^2 37. 109 \text{ սմ}^3: 38. \frac{1}{2} (a^3 - b^3):$$

39. Միջին մասի ծավալը հավասար է 28 սմ³, կողմնային մասերի ծավալները՝ 12 սմ³: 40. 3 : 4:

$$41. abh: 42. \frac{2}{3} abh: 43. 4\sqrt{2} \text{ մ}, 37 \text{ մ}^3, 152 \text{ մ}^3: 44. \frac{Qh\sqrt{Q}}{3(\sqrt{Q} - \sqrt{q})}, \frac{qh\sqrt{q}}{3(\sqrt{Q} - \sqrt{q})}:$$

$$\boxed{9.1-9.3} 1. \pi l^2 d + \frac{4}{3} \pi d^3: 2. \frac{\pi}{3} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}: 3. \frac{7}{3} \pi: 4. \pi ab(a + b): 5. \frac{a}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}}:$$

$$6. 2a^2 r + 2\pi ar^2 + \frac{4}{3} \pi r^3: 7. a^3 + 6a^2 d + 3\pi ad^2 + \frac{4}{3} \pi d^3: 10. \frac{1}{12} \pi a^2 h \cos \alpha: 11. \frac{1}{6} \pi h^3:$$

$$12. \frac{16}{3} r^3: 14. \frac{\pi}{3}:$$

Լրացուցիչ խնդիրներ

$$1. 4 : 1: 2. \frac{7}{27} \nabla: 3. 25 : 36: 4. 240 \pi \text{ սմ}^3, 84 \pi \sqrt{3} \text{ սմ}^2: 10. \frac{1}{3} \pi (R^3 - r^3): 11. 63\pi: 12. 2 \text{ մ}, 5,5 \text{ մ}:$$

$$13. 54 \text{ սմ}^3: 14. \frac{7}{24} \pi R^3 \sqrt{3}: 15. 218 \pi \text{ սմ}^3, 386 \pi \text{ սմ}^3, 602 \pi \text{ սմ}^3: 16. 7 : 19 : 37: 17. \frac{R^3 - r^3}{R^3}:$$

$$18. \frac{2}{3} \pi R r h: 19. 2148 \text{ սմ}^3: 20. 1866 \text{ գ}: 21. 10 \text{ սմ և } 7 \text{ սմ}: 22. 45 \pi \text{ սմ}^3 \text{ և } 243 \pi \text{ սմ}^3: 23. 0,028:$$

24. $5 : 16$: 25. $3528 \pi \text{ սմ}^3$: 26. $\frac{1}{3} \pi R^3$: 27. $112,5 \pi \text{ դմ}^3$: 28. $\frac{1}{2} \pi R^3(2 - 3)$: 29. $\frac{1}{3} \pi R^3$:
 30. $12 \frac{2}{3} \pi (\text{մ}^3)$: 31. $34182 \pi \text{ սմ}^3$:

9.4 1. $\frac{\sqrt{5}}{4}$: 2. $2\pi R \left(h + \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 4R^2} \right)$: 3. $2\pi \cos \frac{\alpha}{2}$ և $2\pi \sin \frac{\alpha}{2}$: 4. Խորանարդի:
 6. $2\pi\sqrt{3}$, $(11 + \sqrt{13})\pi$: 7. $\frac{1}{9} \pi a^3$, $\frac{2}{\sqrt{3}} \pi a^2$: 8. $\frac{2}{3} \alpha R^3$, $2\alpha R^2$:

9.5 2. $2\pi(5 + 2\sqrt{5})$, $2\pi(5 - 2\sqrt{5})$: 3. Վեց գնդային սեգմենտներ՝ յուրաքանչյուրը
 $\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ մակերեսով և ութ «եռանկյուններ»՝ յուրաքանչյուրը $\frac{\pi(3\sqrt{2} - 4)}{8}$ մակերեսով:
 4. $\frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^2d + d^3)$ և $\frac{\pi}{3} (2R^3 + 3R^2d - d^3)$: 5. πR^2 :

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $\frac{1}{2} Sr$: 2. $\frac{r}{3} \sqrt{\pi S^2 - \pi^2 r^4}$: 3. $\frac{\pi}{2} Sr$: 4. $\frac{\pi}{3} Sr$: 6. $\frac{1}{3} \pi r^2 \alpha$: 7. $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$: 8. Այն մարմնի, որը
 ստացվել է մեծ կողմի շուրջը պտտելուց: 9. $2\pi \operatorname{tg} \alpha$ և $\pi(3 - 2\operatorname{tg} \alpha)$: 10. Ցուցում. եթե r , h և l -ը
 համապատասխանաբար կոնի հիմքի շառավիղը, բարձրությունը և ծնորդն են, ապա $2Rh = l^2$,
 $\pi r l = S$: Այս հավասարություններից ստանում ենք, որ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{S}{\pi l} \right)^2 \cdot \frac{l^2}{2R} = \frac{S^2}{6\pi R}$:
 11. $\frac{S}{\cos \alpha}$: 12. $2 : 3$ (երկու դեպքում էլ): 13. $\frac{6R}{m+2}$: 14. $4\pi Q$: 15. $\frac{7}{12} \pi R^3$, $2,5\pi R^2$:
 16. $\frac{1}{6} \pi R^3(3\sqrt{2} - 4)$, $\frac{1}{2} \pi R^2(4 - \sqrt{2})$: 17. $\frac{1}{3} R$: 18. $\frac{1}{3} \pi R^3\sqrt{3}$, $1,5\pi R^2(2\sqrt{3} + 1)$: 19. $2 \frac{2}{3} R^3$,
 $2 : \pi$: 20. $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^2 + mn + n^2}{mn}$: 21. 260 սմ^2 , 240 սմ^3 : 22. $\frac{1}{2} R(\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3})$ և
 $\frac{1}{2} (R\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3})$: 23. $8 : 1$: 24. $a^2(3 + \sqrt{3})$, $\frac{5}{6} a^3$: 25. $4800 \pi \text{ սմ}^3$, $960 \pi \text{ սմ}^2$:
 26. $\frac{\pi a^3}{12} (5 - 2\sqrt{2})$: 27. $\frac{\pi}{24} [3a^2b + 3ab^2 + 2a^3 + 2b^3 - 2(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}]$: 28. 9 սմ , 10 սմ և 17 սմ ,
 փոքրը: 29. $\frac{1}{2} b \cdot h(a + b)$: 30. $3 : 7$: 31. $\frac{c^3}{16}$, $\frac{c^2}{4} \cdot (2 + \sqrt{6})$: 32. $\frac{1}{12} \pi a^3(15 - 8\sqrt{2})$:

Լրացուցիչ խնդիրներ և խնդիրներ կրկնության համար

7. Եռանկյուն, քառանկյուն, վեցանկյուն: 8. $\frac{25}{8}$: 9. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$: 10. $1 : 7$: 11. $8 : 19$:
 14. $2\arcsin \frac{1}{6}$: 15. $2 : 1$: 16. $1 : 1$: 17. ա) $\frac{3}{2} a^3\sqrt{3}$, բ) $a \frac{\sqrt{5}}{2}$, գ) $\arctg \frac{1}{2}$: 18. ա) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$,
 բ) $\arctg \frac{\sqrt{6}}{2}$, գ) $\frac{\pi}{3}$, դ) $\pi - \arccos \frac{1}{4}$, ե) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, գ) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, լ) $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$: 19. ա) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$, բ) 45° ,
 գ) $\arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$, դ) $\pi - \arccos \frac{5}{7}$, ե) a , գ) $\frac{\sqrt{21}-3}{4} a$: 20. $60\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$: 21. $\frac{\sqrt{3}}{27}$, $\frac{\sqrt{181}}{9}$, $\frac{1}{7}$: 23. $\frac{4h^2}{3\sqrt{3}}$,



որտեղ $0 < h \leq \sqrt{3}$: **24.** $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$: **25.** $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$: **26.** $\frac{1}{8}a\sqrt{\frac{2}{3}}$: **27.** $\frac{1}{3}(20\sqrt{3} + 33)$: **28.** Եթե $0 < x \leq \frac{1}{2}$, ապա ծավալների հարաբերությունը հավասար է $\frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 - 1$, եթե $\frac{1}{2} < x \leq 1$, ապա այն հավասար է $\frac{2(1+x)^3 + (2x-1)^3 - 9x^3}{9x^3 - (2x-1)^3}$: **29.** $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$: **30.** $\frac{\pi}{12}(2 - \sqrt{3})$: **31.** $\frac{\pi}{24}$: **32.** Չորս սֆերիկ սեգմենտներ յուրաքանչյուրը $\frac{\pi}{12}(3 - \sqrt{3})$ մակերեսով և չորս կորագիծ եռանկյուններ՝ յուրաքանչյուրը $\frac{\pi}{24}(2\sqrt{3} - 3)$ մակերեսով: **33.** $\frac{3}{\sqrt{11}}a$: **34.** $a^3\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$: **35.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$: **36.** $\frac{\sqrt{3}}{3}R$: **37.** M կետերով և $\sqrt{MA \cdot MB}$ շառավղով շրջանագիծ: **38.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $\frac{abc}{ac + bc + ab + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$: **39.** $\frac{1}{15}V$: **40.** $\frac{2}{9}V$: **41.** $\frac{2}{a^2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$: **42.** Հնարավոր չէ: **43.** $\arcsin\left(\frac{3}{5}\sin\alpha\right)$, $\arcsin\left(\frac{4}{5}\sin\alpha\right)$: **44.** $\arccos\frac{1}{6}$: **46.** 12: **47.** $1 - a$: **49.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$: **50.** 1 : 3: **51.** $\pi r^3 \operatorname{tg} \alpha$: **52.** $\sqrt{65 + 12\sqrt{2}}$ կամ $\sqrt{35 + 12\sqrt{2}}$: **55.** $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$: **56.** 36: **59.** Չորս: **60.** $\arctg\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$: **61.** $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 3$: **62.** $\frac{\pi a^3}{6}$: **63.** $\frac{1}{6}ab^2 \operatorname{ctg} \alpha$: **64.** $\frac{2}{9}$: **66.** $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$: **67.** Եթե $d \leq \sqrt{ab}$, ապա ամենամեծ անկյունը հավասար է $\arctg \frac{|b^2 - a^2|}{2\sqrt{ab}}$, $d > \sqrt{ab}$, ապա այն հավասար է $\arctg \frac{d|b - a|}{ab + d^2}$: **68.** Եթե $R \leq r\sqrt{2}$, ապա բարձրությունը հավասար է $r \pm \sqrt{2r^2 - R^2}$, մնացած դեպքում խնդիրը լուծում չունի: **70.** $\frac{196}{3\sqrt{3}}$:

Հավելված

Ա. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Ուղղանկյուն եռանկյուն

1. $\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})$: **2.** 24° : **3.** 50: **4.** 72: **5.** 18 և 32: **6.** 61: **7.** $2\sqrt{5}$: **8.** 8: **9.** 13: **10.** 10 և 25: **11.** 9: **12.** $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$: **13.** $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{5}}$: **14.** 2: **15.** 6,5: **16.** 5: **17.** $5\sqrt{2}$: **18.** 40: **19.** 1: **20.** 30° և 60° : **21.** $\sqrt{5}$: **22.** 5, 12 և 13: **23.** 120:

2. Հավասարասրուն եռանկյուն

1. 30° : **2.** 6, 8, 8 կամ $\frac{20}{3}, \frac{20}{3}, \frac{26}{3}$: **3.** 100: **4.** $30^\circ, 30^\circ$ և 120° : **5.** $40^\circ, 70^\circ$ և 70° : **6.** 36° : **7.** 14: **8.** 5, 5 և 8: **9.** 9, 9 և $6\sqrt{5}$: **10.** 14: **11.** $\sqrt{10}$: **12.** 45: **13.** 3 : 1: **14.** $3\sqrt{3}$: **15.** 7: **16.** $4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ և

$9 - 5\sqrt{3}$: 17. $\frac{\pi}{4} + \arctg \frac{3}{4}$: 18. $\sqrt{3}$: 19. 2: 20. 7 և 25: 21. $2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) : \cos \alpha$: 22. 12:
23. $\sin(\alpha - \beta) : 2 \sin \beta \cos \alpha$: 24. 33, 75:

3. Հավասարակողմ եռանկյուն

1. $b + c + d$: 2. 30° կամ 150° : 3. $\frac{3\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{8}$: 4. 2: 5. 4: 6. 7: 7. 132° : 8. 14: 9. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$:
10. $1 : (2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)$: 11. $\frac{P\sqrt{3}}{3}$: 12. 12: 13. $\frac{1}{3}$: 14. $2 \sin(30^\circ + \alpha)$: 15. 7: 16. 1 կամ 5:
17. $\frac{3a^2}{4}$:

4. Ընդհանուր առնչություններ եռանկյան մեջ

1. 70° : 2. 18° : 3. 90° : 4. 100° : 5. 60° , 90° և $6\sqrt{3}$: 6. 1: 7. 150: 8. 24: 9. 13 և 15: 10. $\sqrt{3} : 1$:
11. $\frac{(p-q)\sqrt{2}}{2}$: 12. $\frac{2\sqrt{111}}{3}$: 13. 15: 14. $\frac{4}{15}$: 15. 9 : 2: 16. 1 : 30: 17. 23: 18. 10:
19. 30° , 60° և 90° : 20. $22,5^\circ$, $67,5^\circ$ և 90° : 21. 6: 22. 75° : 23. 15: 24. $\arctg(\sqrt{3} - 0,5)$: 25. $\sqrt{34}$ և $5\sqrt{10}$:

5. Նմանության առնչություններ եռանկյան մեջ

1. 24: 2. 10: 3. $\frac{68}{15}$: 4. 6: 5. 15 և 10: 6. 73: 7. 4,5, 9 և 9: 8. 60: 9. 2,4: 10. 30: 11. $\frac{25}{3}$ և $\frac{25}{2}$:
12. 16 և $2\sqrt{133}$: 13. $r_1 + r_2$: 14. $\sqrt{33}$ և $\sqrt{42}$: 15. 20: 16. 30° և 60° :

6. Եռանկյան կիսորդ, միջնագիծ, բարձրություն

1. 5: 2. 4: 3. 39: 4. 18: 5. 36: 6. 75° : 7. 1: 8. 24: 9. 14: 10. 80: 11. 15: 12. 4 : 5: 13. 12 և 15:
14. 30: 15. $\frac{10\sqrt{21}}{11}$: 16. $\frac{100\sqrt{3}}{39}$: 17. 30° , 60° և 90° : 18. $\sqrt{b(b+c)}$: 19. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$: 20. 216: 21. $2420\sqrt{5}$:
22. 22: 23. $\frac{15\sqrt{7}}{16}$: 24. 1 : 2: 25. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$: 26. a : 27. 60° : 28. 9: 29. 9: 30. 12: 31. $\frac{\sqrt{S} \cdot \sin 2\alpha}{3}$: 32. 48:
33. 128: 34. 30° : 35. $16\sqrt{15}$: 36. $12 \cdot S$: 37. 4: 38. 10: 39. 64: 40. 10: 41. 2 : 5: 42. 4: 43. $\frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$:
44. $\left(\operatorname{tg} \frac{(\alpha - \gamma)}{2}\right) : \left(2\operatorname{tg} \frac{(\alpha + \gamma)}{2}\right)$: 45. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$: 46. 20 և 26: 47. 6 և 8: 48. 14, 14 և 16,8: 49. 1 : 2:
50. 33: 51. 5: 52. $\frac{15}{4}$: 53. $14\sqrt{3}$: 54. 30° : 55. $\frac{1}{2S \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin 4\alpha}$: 56. 4,5: 57. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2abk}$:
58. $\frac{S}{4}$: 59. $3\sqrt{3}$: 60. 15 և 20: 61. 12:

7. Եռանկյանը արտագծած է շրջանագիծ

1. 30° , 75° և 75° : 2. 15° , 15° և 150° : 3. 50° , 60° և 70° : 4. $\frac{25}{4}$: 5. $\sqrt{6}$: 6. $\frac{b \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}$:
7. $\left(\frac{1 : 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)$: 8. $\frac{25}{8}$: 9. $\frac{a \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}$: 10. $\sqrt{a(a+b)}$ և $\sqrt{b(a+b)}$: 11. 16: 12. 112: 13. m :
14. Rp : 15. $\sqrt{pq}$: 16. $\frac{\pi}{2}$ և $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$: 17. 6,5: 18. 4: 19. $\frac{5a}{8}$: 14. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$: 20. $3 + \sqrt{3}$:

8. Եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ

1. $\frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$: 2. $\frac{2h^2}{h - 2hr}$: 3. 12: 4. $10\sqrt{3}$: 5. a : 6. $\sqrt{3} + 3$: 7. $6\sqrt{3}$: 8. 6: 9. 46,25: 10. 204:
11. $\frac{1}{2(p-b)^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$: 12. 2 : 1: 13. 30° , 60° և 90° : 14. 6: 15. 12: 16. 32, $\frac{80}{3}$ և $\frac{80}{3}$: 17. 5:
18. $8\sqrt{3}$, $26\sqrt{3}$ և $30\sqrt{3}$: 19. $\operatorname{arctg}\sqrt{11}$: 20. 3, 4 և 5: 21. 9 : 8: 22. $\frac{q^2}{p}$: 23. $\sqrt{2}$: 24. 38: 25. $r_1 + r_2 + r_3$:

9. Խառը խնդիրներ

1. 5: 2. 1: 3. 7 : 2: 4. $\sqrt{n+2}$: 5. 3 կամ $\frac{1}{3}$: 6. 80° : 7. 30° : 8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$: 9. 20° : 10. 3: 11. 18 : 7:
12. $q^2 : p^2$: 13. $p + q$: 14. $\arccos\left(\frac{1}{7}\right)$: 15. $2p$: 16. 4: 17. $r + r_1$:

Բ. ԶԱՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Չուղահեռագիծ

1. 3,5 և 6,5: 2. 18: 3. 56: 4. 20: 5. 8: 6. 78: 7. 24 և 26: 8. 10 և 15: 9. 2: 10. $114,4 \cdot \sqrt{3}$:
11. $p : q \cos \alpha$: 12. 4: 13. 4, 2 և 4: 14. 90° : 15. 36: 16. 2 : 3: 17. $\sqrt{33} - 1$: 18. 4: 19. 7 և 9:
20. 6 : 23: 21. 24: 22. 9: 23. 1,92: 24. $\frac{3l^2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$: 25. 0,05: 26. 8 : 9: 27. 3: 28. 4: 29. $\frac{4}{3}$:
30. 224: 31. 262,5:

2. Ուղղանկյուն

1. 6 և 6: 2. 5,6: 3. 54: 4. 28: 5. $\sqrt{106}$ և $3\sqrt{106}$: 6. $p - q$: 7. $p_1 + p_2 + p_3$: 8. 14 և 16: 9. $36\sqrt{3}$:
10. 8: 11. 90° : 12. $\sqrt{p^4 + q^4} : \sqrt{2p^2}$:

3. Շեղանկյուն

1. 20: 2. 10: 3. 9: 4. $\sqrt{13}$: 5. $\frac{a}{3} \sqrt{13 + 12 \cos \alpha}$: 6. 20: 7. 4,32: 8. 10 և 12: 9. $\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$:

$$10. 60^\circ: 11. 60^\circ: 12. \frac{pq}{p+q}: 13. 4: 14. 9: 15. 60^\circ: 16. 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}: 17. \frac{8R^3 r^3}{(R^2 + r^2)^2}:$$

4. Զառակուսի

$$1. 8: 2. 8,1: 3. 2a\sqrt{2}: 4. 10: 5. 60^\circ: 6. \sqrt{3} - 1: 7. 14: 8. 45^\circ: 9. 90^\circ: 10. 18: 11. 27\sqrt{2}: 12. 5: 13. (1 + \sqrt{3})^2: 4: 14. a: 15. 135^\circ: 16. a^2(1 - \sin 2\alpha): 17. \frac{532}{13}: 18. 2S: 19. \sqrt{116}:$$

5. Մեղան

$$1. 3: 2. 50: 3. 40: 4. 36\sqrt{3}: 5. 16: 6. 13: 7. 48: 8. \sqrt{S}: 9. 12 + 4\sqrt{2}: 10. \sqrt{15}: 11. 16: 12. 2: 13. 21: 14. 4: 15. 35: 16. 3750: 17. 3: 18. 84: 19. 12: 20. 2: 21. 3: 1: 22. 3: 23. 4: 24. \frac{na + mb}{n + m}: 25. 36: 26. 29,4: 27. 15\sqrt{3}: 28. 42: 29. 4\sqrt{3}: 30. 6\sqrt{55}: 31. 9,6: 32. 36: 33. 3: 4: 34. \frac{37}{4}: 35. 8: 7: 36. 4 - 2\sqrt{3}:$$

6. Մեղանին ներգծած է շրջան

$$1. 56: 2. 28: 3. 10: 4. 4: 5. 4r^2: 6. 6R^2: 7. 216: 8. 74: 9. 5 \text{ և } 20: 10. \frac{a + m - n}{a - n} a\sqrt{mn}: 11. 1:$$

7. Մեղանին արտագծած է շրջան

$$1. 144\sqrt{3}: 2. \frac{65}{8}: 3. 12 \text{ և } 16: 4. 2\sqrt{5}: 5. \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2: 6. 13: 7. 5: 8. 10:$$

8. Զառանկյուն, ներգծած և արտագծած քառանկյուններ

$$1. 40^\circ, 80^\circ, 100^\circ \text{ և } 140^\circ: 2. 21: 3. 180^\circ: 4. 115^\circ: 5. 180^\circ: 6. \frac{2}{3} \sqrt{111}: 7. \sqrt{28}: 8. 60^\circ: 9. 42\sqrt{3}: 10. 50\sqrt{3}: 11. 7: 12. \frac{a}{2 \sin \alpha}: 13. 24\sqrt{3}: 14. 4,25: 15. 27\sqrt{3}: 16. 10, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5} \text{ և } 20: 17. 108: 18. 28: 19. 7: 20. \frac{2pr}{\sqrt{p^2 - 4pr}}: 21. 1: 22. 59^\circ: 23. p + q:$$

Դ. ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

1. Ընդհանուր բնույթի խնդիրներ

$$1. 6\sqrt{3}: 2. (4 - 3\sqrt{3}) : (8 + 3\sqrt{3}): 3. 9: 4. 3: 5. 3: 6. 25: 7. 3\sqrt{2} \text{ և } \sqrt{34}: 8. 7: 9. 24\pi: 10. 30: 11. \frac{2Ra}{\sqrt{a^2 + 4R^2}}: 12. 4(2 - \sqrt{3}): 13. 4\sqrt{3}: 14. \frac{8h}{5}: 15. 6,25:$$

2. Երջանագիծը շոշափող և հատող

1. 14,5: 2. $\frac{R^2}{2}$: 3. 2: 4. $8\sqrt{2}$: 5. 20: 6. 9: 7. 1: 8. 6 և 8: 9. 25: 10. 1 : 2: 11. 28: 12. 3 : 1:
13. 136: 14. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$: 15. $35\sqrt{3}$: 16. $\frac{4\sqrt{3}-3}{3}$: 17. $\sqrt{2}$: 18. 5:

3. Երջանագիծ և եռանկյուն

1. 60° : 2. 36° , 36° և 108° : 3. 8: 4. 15 և 20: 5. $\frac{a^3b}{2(a^2+b^2)}$: 6. 5: 7. 25 և $\frac{75}{4}$: 8. $\frac{65}{18}$:
9. $pq\sqrt{\frac{q}{p}}+q$: 10. 3, 4 և 5: 11. $\frac{200\sqrt{3}}{7}$: 12. 1,5: 13. 12: 14. $\frac{r^3\sqrt{3}}{4}$: 15. 30° և 90° :
16. $\frac{r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}{(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}$: 17. 10: 18. 27: 19. $9\sqrt{5}$: 20. 12: 21. 15° և 45° : 22. 8: 23. $\frac{nc}{m}$: 24. 0, $27R^2$:
25. $\frac{120}{31}$: 26. $\frac{a(\sin^2 \beta + 8 \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha}$: 27. $\frac{7a\sqrt{35}}{48}$: 28. $2\sqrt{pq}$: 29. 9,6: 30. $\pi(5\sqrt{2}-1)6$:
31. $\frac{R(\cos \alpha + \cos \beta)}{(1 + \cos \beta)}$: 32. $\frac{75\sqrt{35}a^2}{48}$: 33. $4\sqrt{7}$:

4. Երջանագիծ և քառանկյուն

1. 13 կամ 53: 2. $65\sqrt{3}$: 3. 1 : 2: 4. 5 և 8: 5. $R^2\sqrt{3}$: 6. 16: 7. $\frac{(7-3\sqrt{5})a}{4}$: 8. 1 և 17: 9. 5:
10. 11 : 5: 11. $(3 + \sqrt{5}) : 2$: 12. $\frac{45}{8}$: 13. 8: 14. 36: 15. $2\sqrt{3}$:

5. Երջանագծերի փոխադարձ դիրքը

1. 21: 2. 14: 3. 108° : 4. 2 և $\sqrt{2}$: 5. 16: 6. 6 և 9: 7. 15: 8. 12: 9. 32: 10. $\sqrt{3}$, 3 և $2\sqrt{3}$:
11. $(r+R)\sqrt{rR}$: 12. 8: 13. 8: 14. 3: 15. $3\sqrt{3}-5$: 16. $\sqrt{pq}$: 17. $\sqrt{pq}$: 18. $\frac{\sqrt{R+r}}{r} \cdot a$: 19. 15,36:
20. $\frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2+r^2-R \cdot r}}$: 21. $\frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2-r^2-R \cdot r}}$: 22. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$: 23. $2\sqrt{13}$: 24. $\sqrt{R \cdot r}$: 25. $\frac{R}{3}$: 26. 3:
27. 8: 28. $\sqrt{2} : (\sqrt{2}-1)$: 29. $5,5r$: 30. $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}R$: 31. $2\sqrt{21}-9$: 32. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}R$:
33. $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}a$: 34. 1: 35. $\frac{4}{9}$ կամ 4: 36. $2R$: 37. 15 կամ 30: 38. 2: 39. $R(2\sqrt{3}-3)$: 40. 2,4:
41. $2r^2(2\sqrt{3}+3)$: 42. 8: 43. 3:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Խմբագրի կողմից	3
----------------------	---

ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

8.1 Ի՞նչ է ծավալը	5
8.2 Ուղղանկյունանիստի ծավալը	7
8.3 Պրիզմայի ծավալը	8
8.4 Նմանության սկզբունքը	16
8.5 Բուրգի և հատած բուրգի ծավալները	18
8.6 Բազմանիստերի ծավալների հաշվումը	21
8.7* Ծավալի հատկությունների օգտագործումը խնդիրներ լուծելիս	26

ՊՏՏԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ

9.1 Գլանի, կոնի և հատած կոնի ծավալները	36
9.2 Կավալյերիի սկզբունքը և գնդի ծավալը	37
9.3 Գնդի մասերի ծավալները	39
9.4 Սֆերայի (գնդային մակերևույթի) մակերեսը	45
9.4* Շվարցի «ծալքակոշիկը» կամ ի՞նչ է մակերևույթի մակերեսը	46
9.5 Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը	49

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ	55
---------------------------------	----

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՏԱՐԱԾԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ

ԱՍԲՈՂՋ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Կանոնավոր եռանկյուն բուրգ	61
Եռանկյուն բուրգ	63
Կանոնավոր քառանկյուն բուրգ	66
Քառանկյուն բուրգ	67
Վեցանկյուն բուրգ	67
Հատած բուրգ	67
Խորանարդ	68
Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա	69
Եռանկյուն պրիզմա	70
Ուղիղ և հարթություն	71
Խառը խնդիրներ	73

ՍՏՈՒԳԻՐ ԳԻՏԵԼԻԶՆԵՐԴ	78
ՎԵՐՋԱԲԱՆԻ ՓՈԽԱՐԵՆ	85

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

Հարթաչափության խնդիրներ կրկնության համար

Ա. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Ուղղանկյուն եռանկյուն	89
2. Հավասարասրուն եռանկյուն	90
3. Հավասարակողմ եռանկյուն	92
4. Ընդհանուր առնչություններ եռանկյան մեջ	94
5. Նմանության առնչություններ եռանկյան մեջ	95
6. Եռանկյան կիսորդ, միջնագիծ, բարձրություն	97
7. Եռանկյանը արտագծած է շրջանագիծ	101
8. Եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ	103
9. Խառը խնդիրներ	105

Բ. ԶԱՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Չուգահեռագիծ	106
2. Ուղղանկյուն	109
3. Շեղանկյուն	109
4. Զառակուսի	111
5. Սեղան	112
6. Սեղանին ներգծած է շրջանագիծ	115
7. Սեղանին արտագծած է շրջանագիծ	116
8. Զառանկյուն, ներգծած և արտագծած քառանկյուններ	116

Գ. ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

1. Ընդհանուր բնույթի խնդիրներ	118
2. Շրջանագիծը շոշափող և հատող	119
3. Շրջանագիծ և եռանկյուն	120
4. Շրջանագիծ և քառանկյուն	123
5. Շրջանագծերի փոխադարձ դիրք	125

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ	129
---------------------------	-----

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի
12-րդ դասարանի դասագիրք